Support de cours

ECT - Première année

Voici le cours pour 6 premières semaines de la rentrée prochaine.
Les étudiants n'auront pas de devoir à rendre à la rentrée.
Ils auront une évaluation par semaine dès le mois de septembre.

Monsieur Dawidson

Le Rebours
ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR

Mathématiques

François-Lévy Dawidson
Professeur agrégé de Mathématiques
Année 2025 - 2026

Progression

Progression : environ deux chapitres par période scolaire.
Les deux chapitres 0.A et 0.B sont à faire en TP en demi-groupe.

Outils pédagogiques

A – Cahiers d'exercices et copies doubles pour les évaluations

L'étudiant doit avoir un cahier d'exercices. Les cours (supports) sont disponibles en version PDF et seront imprimés au fur et à mesure de la progression. Il faut également acheter un paquet de copies doubles, on aura en moyenne une évaluation par semaine (25 évaluations sur l'année en plus des khôlles)

B – Évaluations

➟ DS composé de 4 exercices au format du sujet ESCP (4H)

Les DS portent sur tous les chapitres traités avant la date du DS.

➟ Évaluation formative : une fois toutes les semaines/deux semaines

Une évaluation de 2H. Les livres, les supports de cours annotés et tout autre document manuscrit sont autorisés. Le travail reste individuel. La calculette et tout objet connecté sont interdits.

➟ Évaluation sommative : à la fin du chapitre

Une évaluation de 2H. Aucun document n'est autorisé.

C – Khôlles

Au format d'une évaluation sommative, d'aide mémoire ou d'une aide personnalisée.

D – Informatique (Python)

C'est support aux raisonnements mathématiques en s'appuyant sur la structure logique de l'informatique et l'algorithmique. On s'intéresse également à l'implémentation d'un résultat mathématique. Il ne s'agit pas ainsi de cours d'informatique au sens strict du terme.

Installations de Python, outil pour le langage de programmation.

- **Python**
  `https://www.python.org/downloads/` ou `https://www.python.org/downloads/macos/` (MAC)
- **Edupython** : un environnement de travail
  Après l'installation de Python, installer l'IDE EduPython :
  `https://edupython.tuxfamily.org/#t%C3%A91%C3%A9chargement`

E – Livres

[1] Sylvain Rondy, Pierre Berlandi, Niffoi Gianfranco, Nicolas Pierson, Anne-Sophie Pierson-Fertel et Bertrand Hauchecorne (2021). Mathématiques - Informatique - ECT 1re année - Nouveaux programmes. Edition Ellipses.

[2] Adrien Fontaine et Alexandre Gélin (2022). Les mathématiques expliquées pas à pas CPGE - ECT1. Edition Ellipses.

[3] Pierre Berlandi, Gianfranco Niffoi, Nicolas Pierson, Sylvain Rondy (2022). Formulaire Mathématiques - Informatique - ECT 1re et 2e années - Programme 2022. Edition Ellipses.

SUPPORT DE COURS DE MATHÉMATIQUES

ECT - PREMIÈRE ANNÉE

Le Rebours
ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR

CHAPITRE 1

OUTILS DE CALCULS

FRANÇOIS-LÉVY DAWIDSON
Professeur agrégé de Mathématiques
Année 2025 - 2026

1- Calculs numérique et littéral

Les opérations courantes sur l'ensemble des nombres sont l'addition marquée par l'opérateur + et la multiplication marquée par l'opérateur ×.

L'opposé d'un nombre réel x est le nombre réel y tel que $x+y=0$. On le note $-x$.

L'inverse d'un nombre réel non-nul x est le réel y tel que $x\times y=1$. On le note $\frac{1}{x}$.

L'opération $x-y$ pour deux réels x et y est l'addition entre x et l'opposé de y. Donc, $x-y=x+(-y)$. De même, l'opération $\frac{x}{y}$ où y est non nul est la multiplication entre x et l'inverse de y. Donc, $\frac{x}{y}=x\times\frac{1}{y}$.

L'exécution d'une opération sur les nombres nécessite l'application de l'une des propriétés suivantes.

Propriété 1 – Addition

Pour tous réels a, b et c :

- **Commutativité** : $a+b=b+a$
- **Associativité** : $(a+b)+c=a+(b+c)$

Le résultat de l'addition de plusieurs expressions ne dépend pas de l'ordre des opérations. Par exemple $4-x-7-2x=(4-7)+(-x-2x)=-3-3x$.

Propriété 2 – Multiplication

Pour tous réels a, b et c :

- **Commutativité** $a\times b=b\times a$
- **Associativité** $a\times(b\times c)=(a\times b)\times c$

Quand on a que des multiplications, l'ordre des opérations ne compte pas. Par exemple, pour calculer $2\times5\times7$, on peut commencer par calculer $2\times5=10$ et le résultat sera multiplié par 7. On peut également calculer $5\times7=35$ et le résultat sera multiplié par 2 ou encore commencer par calculer $2\times7=14$ et le résultat sera multiplié par 5. Par la commutativité de l'opération multiplication marquée par ×, on peut changer l'ordre des nombres.

Attention ! Quand on a à la fois + et × dans une même opération, il faut suivre une règle de priorités. Par exemple $(2+3)\times5$ n'est pas la même chose que $2+3\times5$. De même $2-3\times4$ ne donne pas -1×4. Ainsi, il faut terminer la multiplication avant d'appliquer l'addition. Pour dire simple, deux nombre multipliés entre-eux sont *collés comme un seul nombre* et deux nombres additionnés sont *séparés*.

En présence de ces deux opérateurs dans une même opération, on peut se servir de la règle suivante :

À retenir 1 – Distribution de la multiplication par rapport à l'addition

Pour tous réels a,b et c,

- **Distribution à gauche** $a\times(b+c)=a\times b+a\times c$
- **Distribution à droite** $(a+b)\times c=a\times c+b\times c$

Une multiplication devant la parenthèse est distribuée par rapport à l'addition et non par rapport à la multiplication. Par exemple, $2\times(3+5) = 2\times3+2\times5$ mais la distribution $2\times(3\times5) = 2\times3\times2\times5$ est fausse.

Dans une seule propriété, ces distributions peuvent être résumées par **la double distribution**. Pour tous réels a, b, c et d :

$$(\underline{a}+b)\times(c+d) = \underline{a\times c+a\times d}+b\times c+b\times d$$

Exemple 1

Développer et réduire les expressions suivantes :

1. $A(x) = x(2x-2) - x(x+3)$.

   $A(x) = 2x^2+$ ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

2. $B(x) = -2x(-3x+2) - x(-3x+3) + x^2$.

   $B(x) = 6x^2+$ ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

3. $C(x) = (1-3x)(-2x+2) - (x-3)(-3x+3) - 3x^2$.

   $C(x) = -2x+2+6x^2-$ ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

4. $D(x) = (4x-2)(-2x+2) - (3x-3)(-3x+3) + 3x^2 - 5x$.

$C(x) = -8x^2 + 8x +$ ....

....

....

....

....

....

La distribution ou la double distribution est également une propriété de factorisation. La *factorisation* est l'opposée de l'opération distribution. Par exemple, $2\times3+2\times7$ est formé de deux blocs d'opérations [1]. Dans le premier bloc 2×3 on trouve 2 et dans le deuxième bloc 2×7 on trouve également 2. Ainsi, le nombre 2 est le facteur en commun de ces deux blocs, ce qui donne :

$$2\times3+2\times7 = 2(3+7)$$

D'une manière générale, pour tous réels a, b et c :

$$\underline{a}\times b+\underline{a}\times c=\underline{a}\times(b+c)$$

Exemple 2

Identifier le facteur en commun, puis factoriser l'expression :

$A(x) = -2x(1-6x) - 3x(4x+1)$.

$A(x) = x\,[$ .... $]$

....

....

....

....

....

$B(x) = -2(2\times(-3x)+1)x - 2x - x(x+3)$.

$B(x) = x\,[$ .... $]$

....

....

....

....

1. On note que l'opérateur $\times$ (ou $\div$) donne un seul bloc de nombres alors que l'opérateur + (ou −) donne deux blocs séparés. Par exemple, dans $2(x+1)-xy$ on a deux blocs : le premier bloc $2(x+1)$ est un seul bloc car la multiplication emporte l'addition, et le deuxième bloc est xy. Le tout ne forme pas un seul bloc car il n'y aucune multiplication ni une division entre $2(x+1)$ et xy.

. . . .

$C(x) = -2(4x-5) \times (-3) \times x - x.$

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

$D(x) = (4x-5)(-x-1) \times 2 - (4x-5)(3-2x).$

$D(x) = (4x-5)$ [. . . .]

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

$E(x) = (a-2b)(3a+b) + 2(a+b)(4b-2a).$

$E(x) = (2b-a)$ [. . . .]

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

$F(x) = a(a+b)b + (ab-b)a - ab^2 - 2ba^2.$

$F(x) = a$ [. . . .]

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

À noter.
L'absence d'un opérateur entre deux nombres (en lettre ou en chiffre) indique la multiplication entre ces deux nombres. Par exemple, xy désigne le produit des deux nombres x et y et $-5(x+1)$ est le produit de -5 avec $(x+1)$.

Définition 1 – Puissance entière d'un nombre

Soit a un nombre réel et n un entier naturel. La puissance n ième de a notée a^n est définie par :

$$a^n = \underbrace{a \times a \ldots \cdots \times a}_{n \text{ fois}}$$

À retenir 2 – Propriétés des puissances

Soient a et b deux réels non nuls et n et m deux entiers naturels. Alors :

- **Même base** a : $a^n \times a^m = a^{n+m}$
- **Même puissance** n : $a^n \times b^n = (a \times b)^n$
- **Puissance de puissance** : $(a^n)^m = (a^m)^n = a^{n \times m}$
- **Changement de signe de la puissance** : $a^n = \dfrac{1}{a^{-n}}$ et $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$, $a \neq 0$

Cas particuliers :

- $a^0 = 1$, $a \neq 0$
- La forme 0^0 n'est pas définie. Mais, $0^n = 0$ pour tout entier naturel non nul n.

Exemple 3

Effectuer les opérations suivantes en simplifiant le résulat autant que possible :

$A = 2^3 \times 2^{-3} \times 3 - 3 \times (3^2 - 2^3)$.

$A = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$A = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$A = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$A = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$A = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$A = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$B = \left(2^3\right)^{-1} \times \left(2^{-2}\right)^{-3}$.

$B = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$B = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$B = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$B = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$B = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$B = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$C = \left(2^2 - 3^2\right)^3 \times 5^{-3}$.

$C = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$C = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$C = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$C = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$C = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$C = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$D = 4^3 \times 4^2 - 4^2 \times 3^2 + 4^2 \times 4^{-2}$.

$D = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$D = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$D = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$D = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$D = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$D = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$E = \dfrac{3^4 \times 12^3}{6^8}$.

....

$E =$ ....

....

$E =$ ....

....

$E =$ ....

....

$E =$ ....

....

$E =$ ....

$F = \dfrac{2^5((-3)^4 - 5^4) \times \left(4^2\right)^3}{(8^5 - 8^6)(3^2 + 5^2)}$.

....

$F =$ ....

....

$F =$ ....

....

$F =$ ....

....

$F =$ ....

....

$F =$ ....

....

$F =$ ....

....

Propriété 3 – Le signe – dans la puissance

Pour tout réel non nul a et pour tout entier naturel n :

$$(-a)^n = \begin{cases} a^n & \text{,si n est pair;} \\ -a^n & \text{,si n est impair.} \end{cases}$$

Exemple 4

Soit n un entier naturel. Simplifier :

$(-1)^{3(2n+1)+2n+1}$ ....

et $((-1)^n)^{n+1}$ ....

À retenir 3 – Opérations sur les fractions

Soient a, b, c et d quatre entiers relatifs tels que $b \neq 0$ et $d \neq 0$.

- **Somme de deux fractions :** $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = \dfrac{a \times d + b \times c}{b \times d}$
- **Produit de deux fractions :** $\dfrac{a}{b} \times \dfrac{c}{d} = \dfrac{a \times c}{b \times d}$
- **Fraction de deux fractions :** $\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \dfrac{a}{b} \times \dfrac{d}{c} = \dfrac{a \times d}{b \times c}$, $c \neq 0$
- **Puissance entière d'une fraction :** $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$ pour tout entier naturel n, $a \neq 0$

Exemple 5

Effectuer les opérations suivantes :

$$A = \frac{3}{-4} \times \frac{3+4}{-2} - 1.$$

....

....

....

....

....

....

....

$$B = \frac{3-5}{5} - 3 \times \frac{-2}{-6} + 1.$$

....

....

....

....

....

....

....

$$C = \frac{\frac{-7}{-4}}{\frac{-3}{5}} \times \frac{3}{2} - 2 \times \frac{4}{3}.$$

....

....

....

....

....

....

....

$$D = \left(\left(\frac{3}{2}\right)^3\right)^{-1} \times \frac{9}{4} - 1.$$

....

....

....

....

....

....

....

Fiche de formules : opérations sur les fractions

Soit $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ avec $b \neq 0$ et $d \neq 0$.

Forme	Règle	Exemple
$\mathbf{a} \times \frac{\mathbf{c}}{\mathbf{d}}$	....	....
$\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}} \times \frac{\mathbf{c}}{\mathbf{d}}$	....	....
$\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}} + \frac{\mathbf{c}}{\mathbf{d}}$	....	....
$\frac{\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}}{\frac{\mathbf{c}}{\mathbf{d}}}$	....	....

Fiche de formules : règles de puissance

Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $(n,m) \in \mathbb{N}^2$.

Forme	Règle	Exemple
$\mathbf{a^n \times b^n}$	....	....
$\mathbf{a^n \times a^m}$	....	....
$\mathbf{\left(\frac{a}{b}\right)^n}$	....	....
$\mathbf{((a)^n)^m}$	....	....
$\mathbf{a^{-n}}$	....	....

Définition 2 – Racine carrée d'un nombre réel positif

Soit a un nombre réel positif. La racine carrée de a notée $\sqrt{a}$ est le réel positif solution de l'équation $x^2 - a = 0$.

Propriété 4 – Propriétés de la racine carrée

Pour tous réels positifs a et b :

- **Multiplicatif** : $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$
- **Permutation avec la puissance** : $\sqrt{a^n} = \left(\sqrt{a}\right)^n$ pour tout entier naturel n, $a \neq 0$.

La multiplicativité de la racine carrée permet d'obtenir :

$$\text{Pour tous réels positifs } a \text{ et } b,\ b \neq 0 \text{ on a : } \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

Erreurs fréquentes : $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$ et $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$ sans que $a > 0$ et $b > 0$

Exemples :

- $\sqrt{4+9} \neq \sqrt{4} + \sqrt{9}$ car $\sqrt{4+9} = \sqrt{13}$ alors que $\sqrt{4} + \sqrt{9} = 2 + 3 = 5$.
- $\sqrt{-4 \times (-9)} = \sqrt{36} = 6$ alors que $\sqrt{-4}$ et $\sqrt{-9}$ ne sont pas définis.

On note que pour tout réel positif a,

$$\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}.$$

Exemple 6

Simplifier les nombres suivants :

$A = \sqrt{12+4} - \sqrt{4^2}.$

$B = \sqrt{2} \times \sqrt{50} - \sqrt{25 \times 16} + \sqrt{10}^2.$

$C = \sqrt{5^5} \times 10^{-3} \times \sqrt{2^6}$

$E = \sqrt{\dfrac{9+16}{49}} \times \dfrac{\sqrt{2 \times 32}}{11^2}.$

$F = \dfrac{\sqrt{2^4 \times 144 \times 49}}{\sqrt{7^3 \times 24^5}} \times \sqrt{35}.$

À retenir 4 – Identités Remarquables

Soient a et b deux nombres réels. Alors :

- ➟ $(a+b)^2 = a^2 + 2 \times a \times b + b^2$
- ➟ $(a-b)^2 = a^2 - 2 \times a \times b + b^2$
- ➟ $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

Exemple 7

À partir de l'une des trois formules d'identité remarquable, déterminer a et b puis factoriser :

$A = 25x^2 - 10x + 1.$

$a =$ .... , $b =$ ....

Formule : ....

$A =$ ....

$B = -49 + 28x - 4x^2.$

$a =$ .... , $b =$ ....

Formule : ....

$B =$ ....

$C = 121 - 81x^2.$

$a =$ .... , $b =$ ....

Formule : ....

$C =$ ....

$D = (-3x+2)^2 - 4(-2x+1)^2.$

$a =$ .... , $b =$ ....

Formule : ....

$D =$ ....

....

....

$E = (x-1)^2 - 4 \times (x-1) + 4.$

$a =$ .... , $b =$ ....

Formule : ....

$E =$ ....

....

....

$F = -25(2x-1)^2 + 49(3x+1)^2.$

$a =$ .... , $b =$ ....

Formule : ....

$F =$ ....

....

....

Règle 1 – Priorité des opérations

- ➟ **Premièrement** : la parenthèse depuis l'intérieur
- ➟ **Deuxièmement** : la puissance
- ➟ **Troisièmement** : la multiplication (et la division)
- ➟ **Quatrièmement** : l'addition (et la soustraction)

Exemple 8

Effectuer les opérations suivantes en montrant toutes les étapes :

$A = -2 \times \left(-3 \times (2^3 - 3^2) \times (-2) - 6\right) \times (-2) + 4.$

....

....

....

....

....

$B = -2 + 2 \times (-2 + 3 \times (-2)) - 2 \times 3^2 \times (6 - 2^2)^2.$

....

....

....

....

....

Règle 2 – Simplification d'une fraction

Pour tous réels a, b et c avec $b \neq 0$ et $c \neq 0$, on a $\dfrac{a \times c}{b \times c} = \dfrac{a}{b}$
On ne peut simplifier deux expressions identiques dans une fraction que si le numérateur et le dénominateur sont respectivement formés d'un seul bloc d'expressions.

Erreur fréquente $\dfrac{a+c}{b+c} = \dfrac{a}{b}$

Exemples

1. Dans $\dfrac{x(2x+1)}{xy}$, le numérateur est formé d'un seul bloc : $x(2x+1)$, et le dénominateur est un seul bloc : xy. Le facteur x est commun à ces deux blocs, donc on peut le simplifier. D' où $\dfrac{x(2x+1)}{xy} = \dfrac{2x+1}{y}$ avec x et y étant supposés non nuls.
2. Dans $\dfrac{x+(2x+1)}{xy}$, le numérateur est formé de deux blocs x et $(2x+1)$. Donc on ne peut pas simplifier x même s'il est à la fois dans le numérateur et dans le dénominateur.

Exemple 9

Si possible, simplifier l'expression suivante, sinon justifier qu'on ne peut pas la simplifier :

$A = \dfrac{2+x}{1+x}$.

....

....

....

$B = \dfrac{x(2x-1)}{2x}$.

....

....

....

$C = \dfrac{x+3}{y+3}$.

....

....

....

$D = \dfrac{x(3^2-5^2)y}{x(3^2-5^2)}$.

....

....

....

$E = \dfrac{(3x-4)^2(x-1)}{(x+1)(4-3x)}$.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

$F = \dfrac{(x^2-1)(2x+2)}{(x+1)^2 \times x}$.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Règle 3 – Opérations des signes

On a

- **Multiplication** : $- \times - \longrightarrow +$ et $- \times +$ ou $+ \times - \longrightarrow -$
- **Division** : $\dfrac{-}{-} \rightarrow +$ et $\dfrac{-}{+}$ ou $\dfrac{+}{-} \rightarrow -$

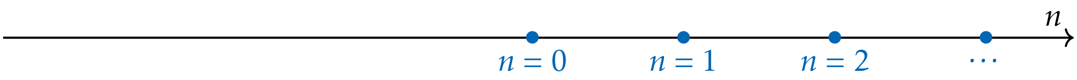
2- ENSEMBLE DE NOMBRES

Les ensembles de nombres couramment utilisés sont :

1. **L'ensemble des entiers naturels noté $\mathbb{N}$**

   Cet ensemble regroupe les nombres permettant de compter l'effectif ou la quantité d'objets indivisibles.

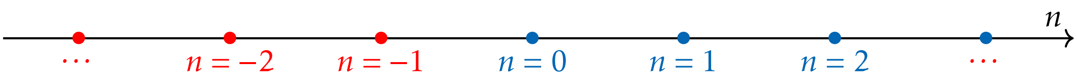
   Par exemple, le nombre de chaises dans une salle de classe, l'effectif des élèves en ETC en France etc.



2. **L'ensemble des entiers relatifs noté $\mathbb{Z}$**

   Cet ensemble regroupe les nombres permettant de compter l'effectif ou la quantité d'objets indivisibles etc.

   Mais, avec une convention de direction ou de positionnement de comptage/comptabilité. Par exemple, je vous dois 5 cahiers c'est -5 et je reçoit 5 cahiers de votre part c'est $+5$. Au sous-sol c'est -1 et au premier étage $+1$, trois pas vers la gauche c'est -3 et trois pas vers la droite $+3$ etc.



3. **L'ensemble des nombres à virgules finies noté $\mathbb{D}$**

   Cet ensemble regroupe les nombres obtenus par le fractionnement des entiers par une puissance de 10. Les nombres dans l'ensemble $\mathbb{D}$ appelés *nombres décimaux* sont de la forme $\dfrac{k}{10^n}$ où k est un entier relatif et n un entier naturel.

   Mathématiquement, on écrit :

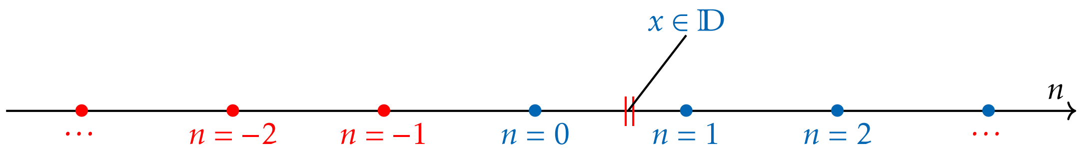
$$\forall x \in \mathbb{D}, \quad \exists (k, n) \in \mathbb{Z} \times N \text{ tel que } \quad x = \frac{k}{10^n}$$

   Ce qui se lit, pour tout nombre décimal x, il existe un couple d'entiers (k, n) où k est entier relatif et n un entier naturel tel que $x = \dfrac{k}{10^n}$.

   Par exemple, on peut couper une barre de fer de 1 m en deux parts égales avec une précision de 1 cm, mais on ne peut pas le couper en trois parts égales avec une bonne précision car chaque barre de fer doit mesurer 0.3333333333333333 à l'infini : aucun instrument ne permet d'obtenir cette prévision. De même, en informatique, $\dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{3}$ ne donne pas 1 mais 0.9999999.... car la précision de la représentation des nombres après la virgule est limité, que ce soit en 64 bits ou en 32 bits.

   À la différence des nombres entiers, on ne peut pas savoir le successeur d'un nombre décimal. Pour un nombre entier comme 3, le successeur est 4 ou encore le successeur de -7 est -6, mais on ne sait pas le nombre décimal juste après 0. C'est-à-dire qu'on ne sais pas le plus petit nombre décimal strictement positif. En outre, entre deux nombres décimaux quelconques, il existe toujours un nombre décimal.

   Le graphique suivant montre qu'entre deux extrémité quelconques sur la droite, aussi proche qu'ils soient, il existe toujours un nombre décimal :



4. **L'ensemble des fractions noté $\mathbb{Q}$**

   Cet ensemble regroupe les nombres de la forme $\frac{k}{n}$ où k est un entier relatif et n un entier naturel non nul. Mathématiquement :

   $$\forall x \in \mathbb{Q}, \quad \exists (k, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \text{ tel que } \quad x = \frac{k}{n}$$

   Il contient naturellement l'ensemble des nombres décimaux car $\frac{k}{10^n}$ est une fraction de deux entiers. Par contre, il existe des nombres sous forme de fraction qui n'est pas un nombre décimal. Le nombre $\frac{1}{3}$ en est un exemple.

   En effet, si $\frac{1}{3}$ est un nombre décimal, alors il existe $(k, n) \in \mathbb{Z} \times N$ tel que $\frac{1}{3} = \frac{k}{10^n}$ soit $3k = 10^n$. Donc, 10^n est divisible pas 3. Or, un entier est divisible par 3 si la somme des nombres dans son écriture décimale est divisible par 3. Ce qui n'est pas le cas pour 10^n dont la somme des nombres dans son écriture décilale est de 1 $(1 + \underbrace{0 + 0 \cdots + 0}_{n \text{ fois}})$. Ainsi, l'appartenance de $\frac{1}{3}$ conduit à une contradiction.

   Par conséquent, $\frac{1}{3}$ ne peut pas être dans l'ensemble $\mathbb{D}$. Ce type de raisonnement s'appelle **raisonnement par l'absurde**.

   Tout comme pour l'ensemble $\mathbb{D}$, entre deux fractions, il existe toujours une fraction et on ne sait pas le successeur d'une fraction. Plus particulièrement, on ne connaît pas la plus petite fraction strictement positive. Par contre, en choisissant un nombre quelconque sur la droite, on n'obtient pas forcément une fraction. Le nombre $\sqrt{2}$ en est un exemple.

   Par l'absurde. Si $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ alors il existe un couple d'entiers $(k, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tel que $\sqrt{2} = \frac{k}{n}$ soit $2 = \frac{k^2}{n^2}$ par passage au carré. On peut supposer que cette fraction est irréductible. Donc, k et n sont premiers entre-eux.

   L'égalité $\frac{k^2}{n^2} = 2$ est équivalente à $k^2 = 2n^2$. Donc, k^2 est un nombre pair, et par suite k aussi l'est. Comme k est un entier pair, alors il existe un entier l tel que $k = 2l$ donc $k^2 = 4l^2$ par passage au carré. Ainsi, $4l^2 = 2n^2$ ce qui donne après simplification par 2 l'égalité $n^2 = 2l^2$. Donc, n^2 est un entier pair et par la suite n aussi. Ainsi k et n sont deux entiers pairs. Donc, il ne sont par premiers entre-eux car ils ont 2 en diviseur commun. Ce qui est en contradiction avec l'hypothèse de départ où la fraction $\frac{n}{k}$ est irréductible.

5. **L'ensemble des nombres réels noté $\mathbb{R}$**

   L'ensemble des réels regroupe tous les nombres possibles. D'une autre manière, quel que soit le nombre choisi sur la droite, le nombre obtenu est dans $\mathbb{R}$.

Ainsi, on peut obtenir l'inclusion :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Qui se lit, l'ensemble N est *inclus* dans l'ensemble $\mathbb{Z}$ (tous les entiers naturels sont des entiers relatifs) qui, à son tour, est inclus dans $\mathbb{D}$ et lui même dans $\mathbb{Q}$ qui est inclus dans $\mathbb{R}$.

Exemple 10

1. Donner des exemples de nombres :

   (a) ....$\in \mathbb{N}$ (b) ....$\in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$ (c) ....$\in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ (d) ....$\in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

   La notation $B \setminus A$ signifie **dans l'ensemble B sans être dans l'ensemble A**

2. Donner le plus petit ensemble de nombres contenant le nombre donné :

   (a) $\dfrac{(-3)^4}{1} \in$ ....
   (b) $-\dfrac{6}{8} \in$ ....
   (c) $\sqrt{9} \in$ ....
   (d) $\dfrac{13}{39} \in$ ....
   (e) $-\sqrt{\dfrac{96}{16}} \in$ ......
   (f) $-\sqrt{162} \in$ ....
   (g) $\dfrac{10^5}{10^3} \in$ ....
   (h) $-\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{18}} \in$ ....

Exemple 11

1. Traduire les énoncés suivants en langage naturel :

   (a) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists q \in \mathbb{Q}$ tel que $x < q$.

   ....

   ....

   (b) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 < 1$ entraîne $-1 < x < 1$.

   ....

   ....

   (c) $\exists n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}$ on a $x^2 + 1 > \dfrac{n}{n+1}$.

   ....

   ....

2. Traduire les énoncés suivants en langage mathématique :

   (a) Tout nombre entier pair est le double d'un autre entier.

   ....

(b) Pour tout nombre rationnel q il existe un entier p tel que pq est un entier.

....

(c) Il existe un entier n tel que pour tout nombre rationnel $q > n$ on a $q > n^2$.

....

(d) il existe un nombre réel qui n'est pas rationnel.

....

(e) Entre deux entiers consécutifs il existe un nombre rationnel.

....

Êtes-vous curieux de savoir s'il y a d'autres classes de nombres ?

Si c'est le cas, voici quelques autres classes de nombres.
Les nombres réels qui n'ont pas d'écritures fractionnaires sont appelés nombres **irrationnels**. Le nombre $\sqrt{2}$ est un exemple de nombre irrationnel. Donc, les nombres sous la forme de fraction sont également appelés nombres **rationnels**. Parmi les nombres irrationnels, on peut distinguer les nombres **algébriques** des nombres **transcendants**. Les nombres algébriques sont des solutions d'une équation polynomiale à coefficients entiers. L'ensemble des nombres algébriques contient alors l'ensemble des nombres rationnels et la pluspart des nombres courament utilisés comme les racines d'un nombre rationnel positif etc. De surcroit, le nombre $\sqrt{2}$ est algébrique car il est solution de $x^2 - 2 = 0$ ainsi que le nombre d'or $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ car il est solution de $x^2 - x - 1 = 0$.

L'ensemble des nombres transcendants regroupe tous les nombres non algébriques. On ne connaît que très peu de nombres transcendants comme le nombre π alors qu'il existe plus de nombre transcendants que de nombres non transcendants.

Enfin, il existe une classe de nombres qui permet de résoudre tout équation polynomiale comme l'équation $x^2 + 1 = 0$ qui n'a pas de solution de $\mathbb{R}$. Cet ensemble s'appelle l'ensemble des nombres **complexes** noté $\mathbb{C}$. Tout nombre complexe peut s'écrire sous la forme $a + ib$ où i appelé nombre imaginaire est une solution de $x^2 + 1 = 0$ soit $i^2 = -1$. Bien que les éléments de cet ensemble soient imaginaires : on ne peut pas l'observer dans la réalité, l'opération dans $\mathbb{C}$ permet de simplifier des calculs et permet de résoudre un grand nombre de problèmes qu'on n'arrive pas résoudre dans l'ensemble des nombres réels.

3- Intervalles et inégalités

Un nombre réel est généralement noté par la lettre x. La lettre x est donc une représentation d'un nombre réel que l'on connait pas encore sa valeur. Elle peut désigner une variable, une inconnue ou un paramètre.

La lettre x représente une variable

C'est le cas le plus fréquent où la lettre x représente une généralité. Elle peut prendre n'importe quelle valeur dans son ensemble de spécification.

Par exemple, $x > 0$ signifie que la lettre x peut prendre n'importe quel réel positif.

Dans l'expression de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x$, on ne cherche pas à savoir combien vaut x ! On cherche à connaître le comportement de la fonction f lorsque x change dans l'ensemble $\mathbb{R}$ comme sa croissance, sa positivité etc.

Dans le cas où la lettre x représente une variable, *lors d'une démonstration*, il ne faut jamais attribuer une valeur à x : ne jamais le remplacer par un réel donné.

La lettre x représente une inconnue

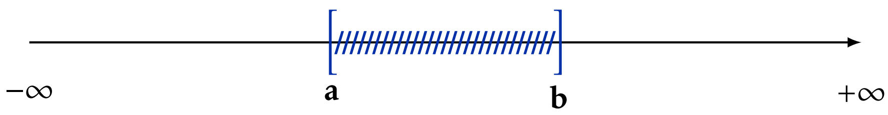
Le réel x est alors à calculer. Il se trouve dans une équation à résoudre. Si on veut savoir pour quelles valeurs de x, $2x+1 > 0$ alors il faut commencer par déterminer le réel x où le signe de l'expression $2x+1$ change. La lettre x est alors, dans un premier temps une inconnue qui vaut ici $\frac{1}{2}$ puis tous les réels x où l'expression $2x+1$ est positive sont les réels supérieur à $\frac{1}{2}$.

La lettre x représente un paramètre

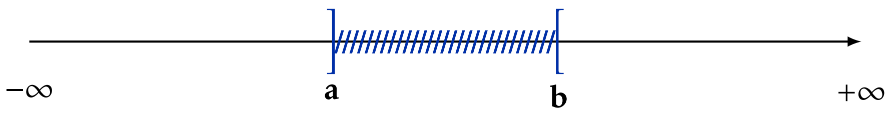
Dans ce cas, la lettre x ne prend pas de valeur mais il est fixé (sans être remplacé) tout au long d'une démonstration ou d'un calcul.

Un intervalle est un sous-ensemble de l'ensemble des réels $\mathbb{R}$ qui contient tous les nombres compris entre ses deux bornes.

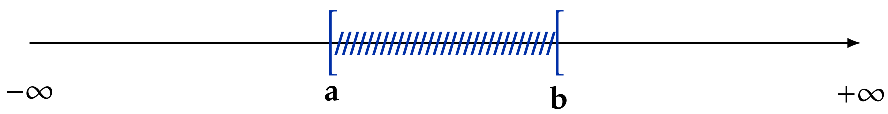
- Intervalle **borné fermé** $[a, b] = \{x \in \mathbb{R}, a \leq x \leq b\}$



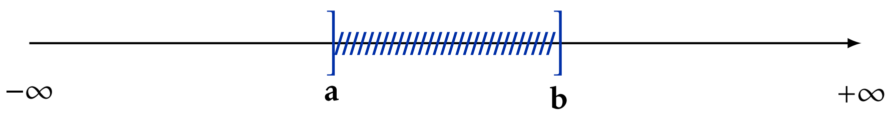
- Intervalle **borné et ouvert** $]a, b[= \{x \in \mathbb{R}, a < x < b\}$



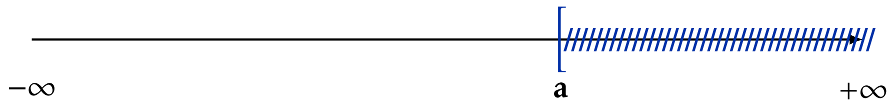
- Intervalle **borné, fermé à gauche et ouvert à droite** $[a, b[= \{x \in \mathbb{R}, a \leq x < b\}$



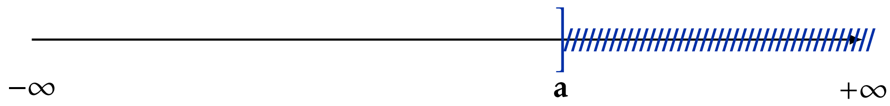
- Intervalle **borné, fermé à droite et ouvert à gauche** $]a, b] = \{x \in \mathbb{R}, a < x \leq b\}$



• Intervalle **non borné à droite et fermé** $[a,+\infty[=\{x\in\mathbb{R}, x\geq a\}$

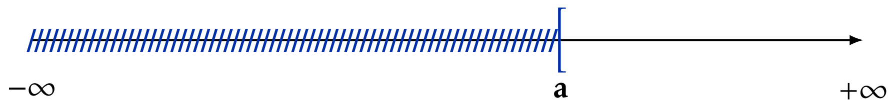


• Intervalle **non borné à droite et ouvert** $]a,+\infty[=\{x\in\mathbb{R}, x> a\}$



• Intervalle **non borné à gauche et fermé** $]-\infty,a]=\{x\in\mathbb{R}, x\leq a\}$

• Intervalle **non borné à gauche et ouvert** $]-\infty,a[=\{x\in\mathbb{R}, x< a\}$

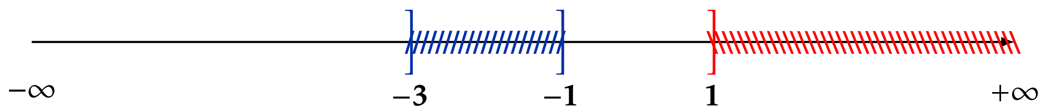


Pour deux ensemble E et F on note :

- $\mathbf{A\cap B}$, l'intersection qui contient les éléments en communs de A et de B : il faut qu'il soit dans A et B pour être dans $A\cap B$.
- $\mathbf{A\cup B}$, la réunion qui contient tous les éléments de A et de B : il suffit que ce soit dans l'un des deux pour être dans la réunion.
- $\emptyset$, l'ensemble qui ne contient aucun élément. C'est l'ensemble *vide*.

Remarque

Un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ peut être un intervalle, une réunion d'intervalles ou un autre ensemble. Dans ce chapitre, on se limite aux intervalles et aux réunions d'intervalles. Par exemple, la solution de $\mathbf{x>1}$ ou $\mathbf{x\in]-3;-1]}$ peut être représentée comme suit :



Ce qui permet d'obtenir la solution sous forme de réunion d'intervalles :

$$S=]-3,-1]\cup]1,+\infty[$$

Sous la forme d'un sous-ensembles de $\mathbb{R}$:

$$S=\{x\in\mathbb{R}, x>1 \text{ ou } -3<x\leq -1\}$$

Méthode – Résolution d'une inéquation

1. Tout mettre d'un côté et 0 de l'autre ;
2. Réduire et factoriser les expressions sous forme de produit de facteurs ne comportant que des expressions de la forme $(ax+b)$ ou (ax^2+bx+c).

Dans le cas où l'expression restante est du second degré, faites références à la méthode utilisant tableau de signe ci-après.

Exemple 12

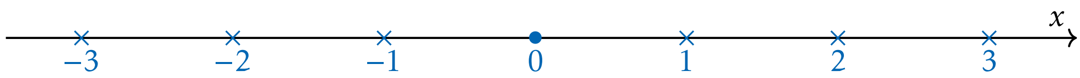
Représenter graphiquement (hachurer la partie de la solution) puis écrire sous forme d'intervalle l'ensemble solution de chacune des inégalités suivantes :

1. $x \in \mathbb{R}$ tel que $4x - 1 > 0$.

   ....

   ....

   ....

   S=..

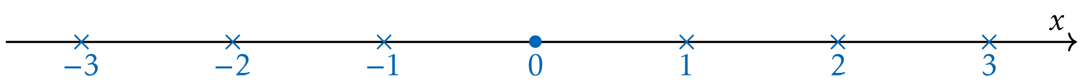
2. $x \in \mathbb{R}$ tel que $3x - 2 \leq -2(2x - 3)$.

   ....

   ....

   ....

   ....

   S=..

3. $x \in \mathbb{R}$ tel que $(3x - 2)(-x + 4) \leq -2(2x - 3)(-3x + 2) + 9x^2 - 1$.

   ....

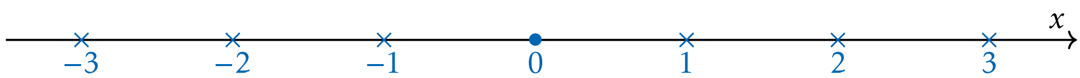
   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   S=..

Dans le cas d'un système d'inéquations, on peut se servir de la propriété suivante :

Propriété 5 – Intersection de deux intervalles

L'intersection de deux intervalles est un intervalle.

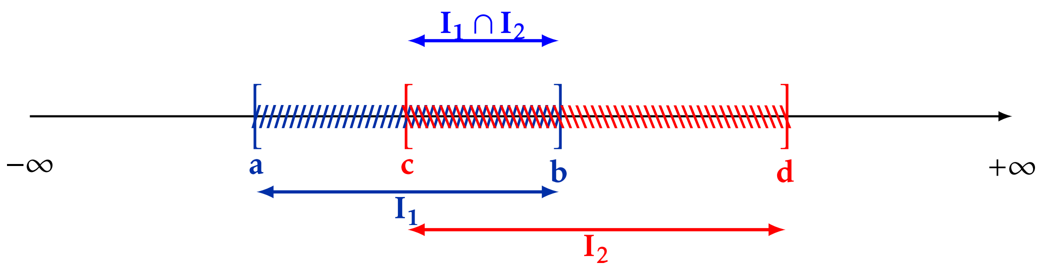
Preuve

Sans perdre la généralité, on peut supposer que les deux intervalles sont bornés et fermés. Soient $I_1 = [a, b]$ avec $a \leq b$ et $I_2 = [c, d]$ avec $c \leq d$ deux intervalles. On a :

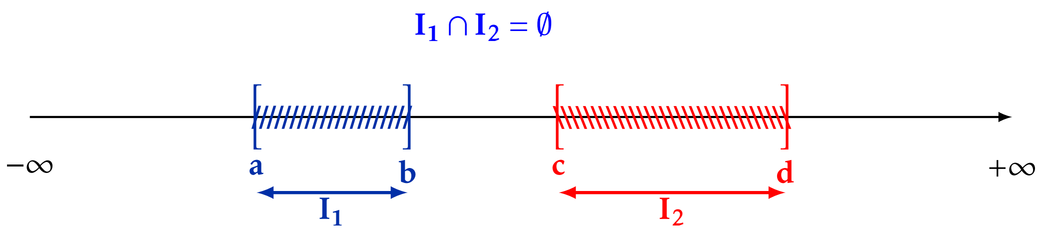
$$I_1 \cap I_2 = \{x \in \mathbb{R}, a \leq x \leq b \text{ et } c \leq x \leq d\}$$
$$I_1 \cap I_2 = \{x \in \mathbb{R}, x \leq b \text{ et } c \leq x\}$$
$$I_1 \cap I_2 = \{x \in \mathbb{R}, c \leq x \leq b\}$$

Dans le cas où $c > b$, $I_1 \cap I_2 = \emptyset$ et dans le cas où $c \leq b$, $I_1 \cap I_2 = [c, b]$.
Dans les deux cas, l'intersection $I_1 \cap I_2$ est un intervalle.

La figure suivante illustre le cas où $c \leq d$:



La figure suivante illustre le cas où $c > d$:



Exemple 13

Résoudre les systèmes d'équations suivants. Représenter graphiquement les solutions et les donner sous forme d'intervalle.

$$\begin{cases} -3x - 3 & > -3(2 - x) \\ -x - 3 & \geq -3(x + 3) \end{cases}$$

Première inéquation $-3x-3>-3(2-x)$.

- Tout mettre d'un côté et 0 de l'autre.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

- Résoudre l'équation

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

Deuxième inéquation $-x-3\geq -3(x+3)$.

- Tout mettre d'un côté et 0 de l'autre.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

- Résoudre l'équation

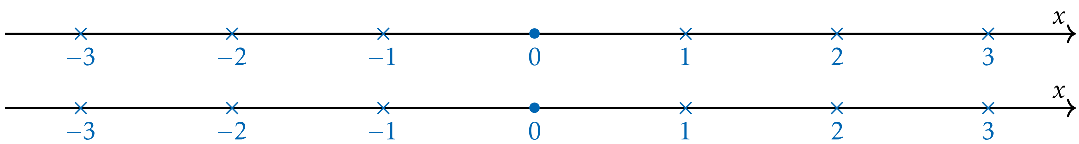
. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

- Représentation graphique des solutions :



- Solution du système d'inéquations $\begin{cases} -3x-3 & >-3(2-x) \\ -x-3 & \geq -3(x+3) \end{cases}$

$S=$ . . . .

Dans le cas où l'expression réduite comporte un second degré, une expression de la forme ax^2+bx+c, on cherche le réel x en calculant le discriminant $\Delta=b^2-4ac$. L'existence et les valeurs des solutions sont déterminées par le signe de Δ.

➟ Si $\Delta>0$, alors l'équation $ax^2+bx+c=0$ admet deux racines distinctes :

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \qquad x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

➟ Si $\Delta=0$, alors l'équation $ax^2+bx+c=0$ admet une solution :

$$x_1=x_2=\frac{-b}{2a}$$

➟ Si $\Delta<0$, alors l'équation $ax^2+bx+c=0$ n'admet aucune solution.

Exemple 14

Résoudre les équations suivantes :

1. $-\frac{1}{4}x^2+3x-5=0$.

$a = \ldots\ldots$, $b = \ldots\ldots$ et $c = \ldots\ldots$

$\Delta = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Conclusion : ....

$x_1 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$x_2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Les solutions de l'équation $-\frac{1}{4}x^2 + 3x - 5 = 0$ sont :

2. $16 - 8x + x^2 = 0$.

$a = \ldots\ldots$, $b = \ldots\ldots$ et $c = \ldots\ldots$

$\Delta = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Conclusion : ....

$x_1 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$x_2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Les solutions de l'équation $-\frac{1}{4}x^2 + 3x - 5 = 0$ sont :

3. $x^2 + x + 1$.

$a = \ldots\ldots$, $b = \ldots\ldots$ et $c = \ldots\ldots$

$\Delta = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Conclusion : ....

$x_1 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$x_2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Les solutions de l'équation $-\frac{1}{4}x^2 + 3x - 5 = 0$ sont :

Les signes d'une expression du second degré dépend également du signe de Δ :

On note $P(x) = ax^2 + bx + c$.

Cas où $\Delta > 0$.

On suppose que $x_1 < x_2$; sinon, on change la numérotation des solutions.
Les signes de $ax^2 + bx + c$ selon les valeurs de a sont donnés dans les tableaux suivants :

Si $a > 0$,

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$P(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Si $a < 0$,

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Cas où $\Delta = 0$.

Les signes de $ax^2 + bx + c$ sont :

Si $a > 0$,

x	$-\infty$		$x_1 = x_2$		$+\infty$
$P(x)$		$+$	0	$+$	

Si $a < 0$,

x	$-\infty$		$x_1 = x_2$		$+\infty$
$P(x)$		$-$	0	$-$	

Cas où $\Delta < 0$.

Les signes de $ax^2 + bx + c$ sont :

Si $a > 0$,

x	$-\infty$		$+\infty$
$P(x)$		$+$	

Si $a < 0$,

x	$-\infty$		$+\infty$
$P(x)$		$-$	

Exemple 15

Dresser le tableau de signe des expressions suivantes :

1. $P(x) := x^2 - \dfrac{5}{6}x + \dfrac{1}{6}$.
   - Solution de l'équation $P(x) = 0$

$a = \dots\dots$, $b = \dots\dots$ et $c = \dots\dots$

$\Delta = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

Conclusion : $\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

$x_1 = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

$x_2 = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

- Le tableau de signe de $P(x)$:

x	$-\infty$ $\cdots$ $\cdots$ $+\infty$
$P(x)$	$\cdots$ 0 $\cdots$ 0 $\cdots$

2. $P(x) := -6\,x^2 + \dfrac{11}{4}\,x - \dfrac{1}{4}$.
   - Solution de l'équation $P(x) = 0$

$a = \ldots\ldots$, $b = \ldots\ldots$ et $c = \ldots\ldots$

$\Delta = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Conclusion : $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$x_1 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$x_2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

   - Le tableau de signe de $P(x)$:

x	$-\infty$ $\cdots$ $\cdots$ $+\infty$
$P(x)$	$\cdots$ 0 $\cdots$ 0 $\cdots$

3. $P(x) = -\dfrac{2}{3}x^2 - x - \dfrac{1}{2}$.
   - Solution de l'équation $P(x) = 0$

$a = \ldots\ldots$, $b = \ldots\ldots$ et $c = \ldots\ldots$

$\Delta = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Conclusion : $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$x_1 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$x_2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

   - Le tableau de signe de $P(x)$:

x	$-\infty$ $+\infty$
$P(x)$	$\cdots$

Si l'expression de base est un produit ou une fraction de plusieurs expressions, on ajoute autant de lignes que le nombre d'expressions de la forme $ax+b$ ou de la forme ax^2+bx+c.

Exemple 16

Dresser le tableau de signe de l'expression $P(x)$:

1. $P(x) = \dfrac{(-2x+1)(x+2)}{-6\,x^2+21\,x-18}$.
   - Résoudre des équations.

$-2x+1=0 \Leftrightarrow$ ....

....

....

....

....

$x+2=0 \Leftrightarrow$ ....

....

....

....

....

On pose $B(x) = -6\,x^2+21\,x-18$.

$a=$ ......, $b=$ ...... et $c=$ ......

$\Delta=$ ....

....

....

....

....

Conclusion : ....

$x_1=$ ....

....

$x_2=$ ....

   - Tableau de signe de $P(x)$:

x	$-\infty$ $\cdots$ $\cdots$ $\cdots$ $\cdots$ $+\infty$
$-2x+1$	
$x+2$	
$-6x^2+21x-18$	
$P(x)$	

2. $P(x) := \dfrac{-2\,x^2+x-1}{8\,x^2+6\,x-9}$.

- Résoudre des équations.

L'équation $-2\,x^2+x-1=0$.

$a=\ldots\ldots$, $b=\ldots\ldots$ et $c=\ldots\ldots$

$\Delta=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Conclusion : $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$x_1=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$x_2=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

L'équation $8\,x^2+6\,x-9=0$.

$a=\ldots\ldots$, $b=\ldots\ldots$ et $c=\ldots\ldots$

$\Delta=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Conclusion : $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$x_1=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$x_2=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

- Tableau de signe de $P(x)$:

x	$-\infty$ $\cdots$ $\cdots$ $\cdots$ $\cdots$ $+\infty$
$-2\ x^2+x-1$	
$8\ x^2+6\ x-9$	
$P(x)$	

Méthode – Résolution d'une inéquation par un tableau de signe

1. Tout mettre d'un côté et 0 de l'autre ;
2. Réduire et factoriser les expressions sous forme de produit de facteurs ne comportant que des expressions de la forme $(ax+b)$ ou (ax^2+bx+c).
3. Dresser le tableau de signe des expressions obtenues

Exemple 17

Résoudre les inéquations suivantes :

1. $-2(4x-3)(x+2) < -x^2 - 3(x+2)(4-2x)$.

• Tout mettre d'un côté et 0 de l'autre.

....

....

....

....

....

....

....

• Résoudre l'équation : ....

$a = \dots\dots\dots$, $b = \dots\dots\dots$ et $c = \dots\dots\dots$

$\Delta = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$ $x_1 = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

....

....

.... $x_2 = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

....

Conclusion : ....

• Tableau de signe :

x	$-\infty$	$\cdots$		$\cdots$		$+\infty$
$P(x)$	$\cdots$	0	$\cdots$	0	$\cdots$	

• Solution de l'inéquation $-2(4x-3)(x+2) < -x^2 - 3(x+2)(4-2x)$:

$S = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

2. $\dfrac{x+1}{1-2x} \geq \dfrac{3x-1}{-4x-1}$.

• Tout mettre d'un côté et 0 de l'autre.

....

....

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

• Résoudre les équations :

Première équation $2\,x^2 - 10\,x = 0$

$a =$ . . . . , $b =$ . . . . et $c =$ . . . .

$\Delta =$ . . . .

. . . .

. . . .

. . . .

Conclusion : . . . .

$x_1 =$ . . . .

. . . .

. . . .

$x_2 =$ . . . .

. . . .

. . . .

Deuxième équation $8\,x^2 - 2\,x - 1 = 0$.

$a =$ . . . . , $b =$ . . . . et $c =$ . . . .

$\Delta =$ . . . .

. . . .

. . . .

. . . .

Conclusion : . . . .

$x_1 =$ . . . .

. . . .

. . . .

$x_2 =$ . . . .

. . . .

. . . .

• Tableau de signe :

x	$-\infty$ $\cdots$ $\cdots$ $\cdots$ $\cdots$ $+\infty$
$2x^2-10x$	
$8\,x^2-2\,x-1$	
$\dfrac{2\,x^2-10\,x}{8\,x^2-2\,x-1}$	

• Solution de l'inéquation $\dfrac{x+1}{1-2x} \geq \dfrac{3x-1}{-4x-1}$:

$S =$ ....

ENTRAÎNEMENTS

EXERCICE 1: CALCULS

Calculer et simplifier :

$A = -\sqrt{121}\sqrt{75} - \sqrt{12} \times \sqrt{3^4}$.

$B = -3 \times (4x-3)^2 - 3 \times (2x-5) \times (3x+2) \times 3$

EXERCICE 2: OPÉRATIONS SUR LES FRACTIONS : CALCUL NUMÉRIQUE

Calculer sous forme de fraction irréductible.

$$A = \left(\frac{5}{6}\right)^3 \times \frac{144}{25} - \frac{10}{15}$$

$$B = -\frac{5}{7} \times \frac{-14}{10} - \frac{1}{-2} : \frac{4}{-5}$$

$$C = \left(\frac{18}{27} - \frac{4}{9} + \frac{13}{18}\right) \times \frac{-36}{5}$$

$$D = \frac{3}{-4} \times \left(\frac{-3}{5} - 2 \times \frac{3}{-4}\right) - \frac{-1}{-2} : \left(\frac{7}{3} - \frac{-5}{6}\right)$$

$$E = \left(\frac{-4}{3} + \frac{-5}{-6}\right)^2 \times \frac{18}{15} - 1$$

$$F = \frac{7-4}{7+4} \times \frac{\left(3^2-7\right)^2}{-6} - 1 - \frac{4+5}{7+5} \times \frac{7+5}{9+5}$$

EXERCICE 3: OPÉRATIONS SUR LES FRACTIONS : CALCUL NUMÉRIQUE

Calculer sous forme de fraction irréductible.

$$A = \frac{2^{16} - 3^{16}}{2^8 + 3^8} \frac{5^2}{2^2 + 5^2}$$

$$B = \frac{\frac{7-8}{7-9} - \frac{9-7}{8-7} \times (-2)}{\frac{7-8}{7-9} \times (-2)}$$

$$C = \left(\left(\frac{-5}{-3}\right)^{24}\right)^{-5} \times \left(\frac{-3}{5}\right)^{121} + \frac{18}{5} \times \frac{1}{6}$$

$$D = \frac{\left(2^2 \times 2^{-3} - 2^5 \times 4^{-2}\right)^2}{\frac{25}{9}} \times \left(\frac{3}{2}\right)^2$$

$$E = (-5) \times \left(3^2 - 2^2\right)^3 - \frac{17}{5} \times \left(3^2 - 2^2\right)^3 + \left(3^2 - 2^2\right)^3$$

$$F = \frac{27}{64} \times \left(\frac{3^4}{4^3} - \left(\frac{3}{4}\right)^3\right)^{-3} - 1$$

EXERCICE 4: OPÉRATIONS SUR LES FRACTIONS : CALCUL LITTÉRAL

Préciser l'ensemble de définition de l'expression, puis la simplifier sous forme de fraction irréductible.

$$A = (-3x - x \times 2 - 1) \times (-4) - 2 \times (2 - 3x)$$

$$B = \frac{1+x}{x} - \frac{1-x}{1+x} - 1$$

$$C = \frac{3(x+1) - 4}{(3x-1)(x-4)}$$

$$D = (4x-1)(-2x+1) - 2(1-2x)(-3x+1) + 2x - 1$$

$$F = \frac{x}{1-x} - \frac{x}{x+1}$$

$$E = \frac{-x}{4-2x} - \frac{x}{x+1} - \frac{1-2x}{1-2x}$$

EXERCICE 5: LES NOMBRES SOUS LA RACINE CARRÉE

Simplifier l'écriture du nombre suivant :

$$A = \sqrt{7} + \sqrt{2} - \sqrt{9}$$

$$B = \sqrt{13} \times \sqrt{4+9} - \sqrt{121}$$

$$C = -5\sqrt{64-36} + 7\sqrt{7}$$

$$D = \left(\sqrt{18} - 2\sqrt{27}\right) - \sqrt{2} \times \left(-4\sqrt{6} + \sqrt{150}\right)$$

$$E = \left(-3\sqrt{3}^2 - \frac{\sqrt{5}\sqrt{20}}{\sqrt{9+16}}\right)$$

$$F = \sqrt{5^6 \times 125 \times 169}$$

EXERCICE 6: DÉVELOPPEMENT

Développer et réduire sous forme d'expression polynomiale.

$A = -2\times(3-2x)\times(4x-7)-3x^2-x\times(3x-1)\times(-3)$

$B = (2x-1)^2 - 4 + 3\times(x-2)\times(-5-3x) - 5x^2$

$C = (-2x+3)\times(4x-2)\times x-(3x-2)\times(1-x)\times(4x-7)$

$D = -2\times(x-1)^2\times\left(-x+\frac{3}{2}\right) - 2x\left(-x+\frac{5}{2}\right)^2$

$E = -2x - 3\times(2-3x)^2 - x - 3x\times(5x-2)$

$F = -2x - 3\times(2-3x)^2 - x - 3x\times(5x-2)$

EXERCICE 7: FACTORISATION

Factoriser :

1. $C = -9\times(2-3x)^2 + 16\times(5x+1)^2$.
2. $D = 25x^2 - (2x-3)^2\times 16$.
3. $E = (2x-3)\times(4-5x) - 2\times(3-2x)\times(5-x)$.

EXERCICE 8: FACTORISATION

Factoriser les expressions suivantes.

$A = \left(9x^2-12x+4\right) - (3x-2)\times(3x+2)\times(-3)$

$B = -2x\times(3-5x)\times(2x+1) - (2x+1)^2$

$C = 4\times(-2x+3)^2 - 25\times(-2+3x)^2$

$D = -2\times(5x-3)\times(1-2x) - \left(4x^2-4x+1\right)$

$$E = \frac{-3}{-2}\times\left(-\frac{5}{-3}x-2\right)\times\left(\frac{-7}{-3}-\frac{-5}{3}x\right) - \frac{-3}{2}\times(5x-6)\times(-3x+1)$$

EXERCICE 9: FACTORISATION

Identifier le nombre de blocs ainsi que le ou les facteurs en commun(s) des différents blocs puis factoriser les expressions suivantes :

$A = x\times(3x-1) - x^2 - 5x\times(-2-x)$

$B = (2x+1)\times(2x-1) - (4x-2)\times x$

$C = (x+1) - 2(x+1)(3x-4)\times 2 - 3(x+1)(2x+2)$

$D = x^2(3x-4) - x(x+2)x - 3x^2(1-x)$

$E = (x-a)x - (a-x)a - (x-a)^2$

$F = (2x-3)^2 - 2(2x-3)(2x+3) - 2x + 3$

EXERCICE 10: INTERVALLES D'ENTIERS

1. Énumérer les éléments des intervalles suivants :

   (a) $[\![2,8]\!]$ (b) $[\![10,18]\!]$ (c) $[\![14,+\infty[\![$ (d) $[\![8,+\infty[\![$

   Vous pouvez utiliser les trois points de suspension pour citer des éléments entre deux valeurs.
2. Écrire sous forme d'intervalle d'entiers les ensembles suivants :

   (a) $\{2,3,\dots,18\}$ (b) $\{7,8,9,\dots,21\}$ (c) $\{0,1,2,\dots,150\}$ (d) $\{8,9,10,\dots\}$

EXERCICE 11: INTERVALLES ET RÉUNION D'INTERVALLES (DE RÉELS)

1. Représenter graphiquement puis écrire sous forme d'intervalles les solutions des inéquations suivantes :

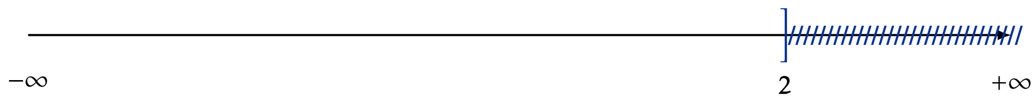
   (a) $-2\times(2-x) > -3\times(2x+4)$
   (b) $-3\times(4-2x) \le -2\times 3$
   (c) $-4\times(-3x+3) - 3x < -2\times(2-4x)$
   (d) $2\times(3x-3) \ge -3\times(4-2x)$

2. Représenter graphiquement puis écrire sous forme d'ensemble les intervalles et réunions d'intervalles suivants :

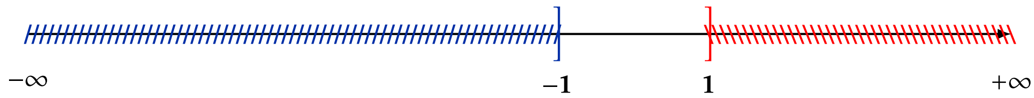
(a) $]-\infty,+\infty[$ (b) $]-\infty,1[$ (c) $[0,+\infty[$ (d) $]-3,0]$ (e) $[1,2[\cup[3,4]$ (f) $]-1,2[\cup]3,+\infty[$ (g) $[-3,-1]\cup]0,1[$ (h) $]-1,0[\cup]0,1]$

3. Représenter sous forme d'intervalle ou de réunion d'intervalles puis écrire sous forme d'ensemble les parties hachurées dans les graphiques suivants :

(a)



(b)



(c)

Exercice 12: Inéquations

À l'aide d'un tableau de signe, résoudre les inéquations suivantes :

1. $-5x-4<6x+2$.
2. $-2(x-3)(7-3x)\geq(-3x+2)(7x+1)$.
3. $3\times(2-x)<2x-\dfrac{2}{3}\times(2x+1)$.
4. $\dfrac{1-4x}{5-2x}\geq-\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{4}$.
5. $-\dfrac{3}{4}x-3\times\dfrac{5}{3}\times(3-2x)x\leq-\dfrac{7}{6}\times(2x-3)x$.
6. $\dfrac{-10\,x^2+17\,x-3}{x^2-3\,x+7}<0$.
7. $\dfrac{(1-2x)(-6\,x^2+17\,x-5)}{x^2+6\,x+8}>0$.

Exercice 13: Système d'inéquations et intervalle

Résoudre les systèmes d'inéquations suivants. Représenter graphiquement l'ensemble de solutions, puis l'écrire sous forme d'intervalles.

1. $\begin{cases} -4x\times(2-x) & >1 \\ 1-2x & \geq\dfrac{3}{2} \end{cases}$

2. $\begin{cases} -\dfrac{3}{4}\times(3x-2)(1-4x) & \leq(3x-2)^2 \\ 4x+5 & >-5+4x \end{cases}$

3. $\begin{cases} -x & >x \\ -(2-x) & <-3x+2 \\ x\times(4x-1) & \leq(2x-1)^2 \end{cases}$

4. $\begin{cases} -2\times(3-2x) & \leq 2\times(4-x) \\ -3\times(6+x) & \geq-2-4\times(2+x) \\ -(3-2x)\times\dfrac{1}{2} & <-\dfrac{1}{2}\times\left(4x-\dfrac{5}{2}\right) \end{cases}$

Support de cours de Mathématiques
ECT - Première année

Le Rebours
ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR

Chapitre 2

Matrices
système d'équations linéaires

François-Lévy Dawidson
Professeur agrégé de Mathématiques
Année 2025 - 2026

1- Système d'équations linéaires et matrices

On rappelle que pour résoudre un système d'équations linéaires, on peut commencer par réduire le nombre d'inconnues. Par exemple, pour un système à deux inconnues notées x et y, on commence par éliminer l'une des deux pour obtenir une équation ne comportant que x ou ne comportant que y. On résout l'équation ainsi obtenue en isolant l'inconnue. Cette méthode s'appelle **méthode par élimination**. À titre de modèle, on se propose de résoudre le système d'équations linéaires suivant :

$$(S)\quad \left\{\begin{array}{rcrcr} -2x & + & 3y & = & 3 \\ 3x & + & y & = & 12 \end{array}\right.$$

On note :

- L_1 la première ligne. C'est-à-dire la première équation ;
- L_2 la deuxième ligne. C'est-à-dire la deuxième équation.

Résolution du système (S)

1. **Élimination de x pour calculer y**

   Le coefficient de x dans L_1 est -2 alors que son coefficient dans L_2 est 3. L'opération qui permet d'éliminer x est alors $3L_1 - (-2L_2)$: échanger les coefficients dans le calcul. Ainsi, on obtient :

$$(S)\quad \left\{\begin{array}{rcrcrlcll} -2x & + & 3y & = & 3 & L_1 & & & \text{à garder} \\ 3x & + & y & = & 12 & L_2 & \leftarrow & 3L_1 - (-2L_2) & \text{à remplacer} \end{array}\right.$$

   La ligne à remplacer donne :

$$3 \times (-2x + 3y) - (-2 \times (3x + y)) = 3 \times 3 - (-2 \times 12)$$

   Soit $-6x + 9y + 6x + 2y = 33$. Ainsi, $11y = 33$. Ce qui donne $y = 3$.

2. **Élimination de y pour calculer x**

   Le coefficient de y dans L_1 est 3 alors que son coefficient dans L_2 est 1. L'opération qui permet d'éliminer y est alors $L_1 - (3L_2)$: échanger les coefficients dans le calcul. Ainsi, on obtient :

$$(S)\quad \left\{\begin{array}{rcrcrlcll} -2x & + & 3y & = & 3 & L_1 & & & \text{à garder} \\ 3x & + & y & = & 12 & L_2 & \leftarrow & L_1 - 3L_2 & \text{à remplacer} \end{array}\right.$$

   La ligne à remplacer donne :

$$-2x + 3y - 3 \times (3x + y) = 3 - (3 \times 12)$$

   Soit $-2x + 3y - 9x - 3x = -33$. Donc, $x = 3$

3. **Vérification et solution**

   On a :

$$(S)\quad \left\{\begin{array}{rcrcr} -2 \times 3 & + & 3 \times 3 & = & 3 \\ 3 \times 3 & + & 3 & = & 12 \end{array}\right.$$

   D'où la solution du système (S) :

$$S = \{(3, 3)\}$$

Exemple 18

Par la méthode par élimination résoudre les systèmes d'équations suivants :

$$(S1)\begin{cases} x + y = 1 \\ x - 2y = 3 \end{cases} \qquad (S3)\begin{cases} -3x + 3y = -1 \\ 4x + 5y = 3 \end{cases}. \qquad (S5)\begin{cases} -x + y = -4 \\ 2x - 2y = 3 \end{cases}$$

$$(S2)\begin{cases} x - 3y = 2 \\ 4x - 2y = 4 \end{cases} \qquad (S4)\begin{cases} -x + 5y = -4 \\ -2x - y = 3 \end{cases} \qquad (S6)\begin{cases} -3x + 5y = -4 \\ 6x - 10y = 8 \end{cases}$$

Résolution de (S1) :

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

MÉTHODE 1 – MÉTHODE DE PIVOT DE GAUSS : CAS DE 3 INCONNUES

Cette méthode consiste à réduire le nombre d'inconnues dans les équations.
On peut suivre les étapes de l'exemple suivant :

On veut résoudre le système (S) suivant, les inconnues sont x, y et z.

$$(S)\left\{\begin{array}{rrrcrl} x & -2y & +z & = & 0 & \text{Ligne de x} \\ 3x & +y & -z & = & 2 & \text{Ligne de y} \\ -2x & -y & +z & = & -1 & \text{Ligne de z} \end{array}\right.$$

Pivot x : éliminer x dans les lignes de y et de z

$$(S)\left\{\begin{array}{rrrcrr} x & -2y & +z & = & 0 & \text{Pivot} \\ 3x & +y & -z & = & 2 & L2 \leftarrow L2-3L1 \\ -2x & -y & +z & = & -1 & L3 \leftarrow L3+2L1 \end{array}\right.$$

Ce qui donne le système suivant :

$$(S)\left\{\begin{array}{rrrcrr} x & -2y & +z & = & 0 & \text{Pivot} \\ & +7y & -4z & = & 2 & L2 \\ & -5y & +3z & = & -1 & L3 \end{array}\right.$$

Pivot y : éliminer y dans la ligne de z

$$(S)\left\{\begin{array}{rrrcrr} x & -2y & +z & = & 0 & ----- \\ & +7y & -4z & = & 2 & \text{Pivot} \\ & -5y & +3z & = & -1 & L3 \leftarrow 7L3+5L2 \end{array}\right.$$

Ce qui donne le système suivant :

$$(S)\left\{\begin{array}{rrrcrr} x & -2y & +z & = & 0 & \text{Pivot} \\ & +7y & -4z & = & 2 & L2 \\ & & z & = & 3 & L3 \end{array}\right.$$

Pivot z : éliminer z dans les lignes de x et de y

$$(S)\left\{\begin{array}{rrrcrr} x & -2y & +z & = & 0 & L1 \leftarrow L1-L3 \\ & +7y & -4z & = & 2 & L2 \leftarrow L2+4L3 \\ & & z & = & 3 & \text{Pivot} \end{array}\right.$$

Ce qui donne le système suivant :

$$(S)\left\{\begin{array}{rrrcrr} x & -2y & & = & -3 & L1 \\ & +7y & & = & 14 & L2 \\ & & z & = & 3 & \text{Pivot} \end{array}\right.$$

Pivot y : éliminer y dans la ligne de x

$$(S)\left\{\begin{array}{rrrcrr} x & -2y & & = & -3 & L1 \leftarrow 7L1+2L2 \\ & +7y & & = & 14 & \text{Pivot} \\ & & z & = & 3 & -------- \end{array}\right.$$

Ce qui donne le système suivant :

$$(S)\left\{\begin{array}{rrrcrr} x & & & = & 1 & L1 \\ & +7y & & = & 14 & L2 \\ & & z & = & 3 & L3 \end{array}\right.$$

Fin : réduire les coefficients de x,y et z

$$(S)\left\{\begin{array}{ccccl} x & & & = 1 & \text{Pas de changement} \\ & +7y & & = 14 & L2 \leftarrow \frac{1}{7}L2 \\ & & z & = 3 & \text{Pas de changement} \end{array}\right.$$

Ainsi, la solution du système (S) :

$$S = \{(1,2,3)\}$$

Exemple 19

Par la méthode de Pivot de Gauss, résoudre les systèmes suivants :

$$(S7)\left\{\begin{array}{ccccc} 2x & -4y & = & -6 \\ 3x & +y & = & 19 \end{array}\right. \qquad (S8)\left\{\begin{array}{ccccc} -x & +y & & = & 1 \\ & -y & +z & = & -3 \\ x & & +z & = & 4 \end{array}\right. \qquad (S9)\left\{\begin{array}{cccccc} 2x & -y & +z & = & -2 \\ -x & +3y & -4y & = & 0 \\ 3x & -2y & +2z & = & -3 \end{array}\right.$$

Résolution de (S9)

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

2- Opérations sur les matrices carrées

Dans l'exemple 18, le système (S1) peut s'écrire :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Cette représentation s'appelle écriture matricielle du système (S1) où

- La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ est une matrice à 2 lignes et 2 colonnes : de dimension 2×2, ou carré d'ordre 2.
- La matrice $\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}$ est une matrice à 1 ligne et 2 colonnes : de dimension 1×2.
- La matrice $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ est une matrice à 2 lignes et 1 colonne : de dimension 2×1.

Exemple 20

1. Donner les écritures matricielles des systèmes dans les exemples 18 et 19.

(S1) :

....
....
....
....
....

(S4) :

....
....
....
....
....

(S2) :

....
....
....
....
....

(S5) :

....
....
....
....
....

(S3) :

....
....
....
....
....

(S6) :

....
....
....
....
....

2. Donner les écritures matricielles des systèmes de l'exemple 19.

(S7) :

....
....
....
....
....

(S8) :

....
....
....
....
....

(S9) :

....
....
....
....
....

Définition 3 – Matrice de format (n,p) ou $n \times p$

Soit $(n,p) \in \mathbb{N}^{*2}$. Une `matrice` de dimension $n \times p$ ou de format (n,p) est une représentation de données comportant n lignes et p colonnes. Pour $i \in [\![1,n]\!]$ et $j \in [\![1,p]\!]$, les données sur chaque i ième ligne et j ième colonne sont appelées `coefficients` de la matrice.

Notations

Généralement, une matrice est désignée par une lettre en capitale comme M, A... et les coefficients sont notés par $(m_{i,j})$ ou $(a_{i,j})$ avec $i \in [\![1,n]\!]$ et $j \in [\![1,p]\!]$.

L'ensemble des matrices réelles *(les coefficients sont des nombres réels)* de dimension $n \times p$ est noté $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Dans le cas où $n = p$, on note $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des `matrices carrées d'ordre` n.

Représentation

Une matrice $M = (m_{i,j})$, $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$ est représentée sous la forme :

$$\begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & \cdots & \cdots & m_{1,p-1} & m_{1,p} \\ m_{2,1} & m_{2,2} & \cdots & \cdots & m_{2,p-1} & m_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ m_{n-1,1} & m_{n-1,2} & \cdots & \cdots & m_{n-1,p-1} & m_{n-1,p} \\ m_{n,1} & m_{n,2} & \cdots & \cdots & m_{n-1,p-1} & m_{n,p} \end{pmatrix}$$

La <u>`Matrice nulle`</u> est la matrice où tous les coefficients sont nuls.

La <u>`matrice identitée d'ordre p`</u> est la matrice carrée d'ordre p qui n'a que 1 sur la diagonale et 0 partout ailleurs. Donc, $I_p = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Définition 4 – Addition et multiplication de matrices

- Soient $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$ deux matrices de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, alors la **matrice somme** notée $A + B$ est définie par ses coefficients $c_{i,j}$ tels que :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!], c_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j}$$

- Soient $A = (a_{i,j})$ une matrice $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $B = (b_{i,j})$ une matrice de $\mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{R})$, alors la **matrice produit** notée $A \times B$ est définie par ses coefficients $c_{i,j}$ tels que

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,q]\!], c_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k} \times b_{k,j}$$

Intuitivement :

- Additionner deux matrices de même format c'est additionner les coefficients dans les mêmes positions.
- Multiplier deux matrices où le nombre de colonnes de la première matrice est égal au nombre de lignes de la deuxième matrice c'est calculer la somme des produit de chaque ligne de la première avec chaque colonne de la deuxième.

Exemple 21

On donne les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } C = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Calculer si possible, (justifier l'impossibilité si c'est la cas) :

1. ....

   $C + D$= ....

   ....

2. ....

   $A + C$= ....

   ....

3. ....

   $A + B$= ....

   ....

4. ....

   $C \times C$= ....

   ....

5. ....

$B \times B=$ ....

....

6. ....

$C \times D=$ ....

....

7. .... $D \times A=$ ....

....

8. .... $A \times D=$ ....

....

Définition 5 – Multiplication d'une matrice par un scalaire

Soient $A = (a_{i,j})$ une matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors on peut définir la matrice λA par ses coefficients $c_{i,j}$ tels que :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!], c_{i,j} = \lambda a_{i,j}$$

Propriété 6 – Distribution de $\times$ par rapport à $+$

Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $(B,C) \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{R})^2$. Alors :

$$A \times (B + C) = A \times B + A \times C$$

Soit $(A,B) \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})^2$ et $C \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{R})$. Alors :

$$(A + B) \times C = A \times C + B \times C$$

Définition 6 – Transposée d'une matrice

Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice dans $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. La `matrice transposée de A` notée ${}^tA$ est une matrice dans $\mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ définie par ses coefficients $\tilde{c}_{i,j}$ tels que :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!], \tilde{c}_{i,j} = c_{j,i}$$

On note que pour deux matrices A et B : $\mathbf{{}^t(AB) = {}^t B {}^t A}$.

Exemple 22

On donne les matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$. Calculer si possible $2A \times (C - 4D)$, $(-2B + 3AC) \times^t B$, ${}^t(CA) \times \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

Dans la suite, les matrices sont carrées d'ordre p, $p \in \mathbb{N}^*$. C'est-à-dire que la matrice comporte p lignes et p colonnes.
L'**ordre d'une matrice carrée** correspond au nombre de ses lignes (ou le nombre de ses colonnes).

Définition 7 – Inversion d'une matrice

Soit P une matrice carrée d'ordre p. La matrice P est **inversible** si, et seulement si, il existe une matrice Q telle que le produit de matrices $PQ = I_p$ où I_p désigne la matrice identité d'ordre p.

Exemple 23

Escp 2023 On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $AQ = QD$.

   . . . .

   $AQ =$ . . . .

   . . . .

   . . . .

   $QD =$ . . . .

   . . . .

   Donc . . . .

2. Calculer QR puis en déduire que Q est inversible et exprimer Q^{-1} en fonction de R puis sous forme de tableau de nombres.

   . . . .

   $QR =$ . . . .

   . . . .

   Donc . . . .

Par conséquent Q^{-1} = ...

....

....

Exemple 24

Oral HEC 2011 (T3), exercice sans préparation

Soit A la matrice carrée d'ordre 3 définie par $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ \frac{1}{2} & 0 & 2 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$.

1. On note I la matrice unité d'ordre 3. Trouver une relation entre A, A^2 et I.

   ....

   A^2 = ...

   ....

   ....

   ....

   ....

2. En déduire, par l'absurde, que A est une matrice inversible. Calculer A^{-1}.

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

Exemple 25

Oral HEC 2013 T9, exercice sans préparation

Soit a_1, a_2 et a_3 de réels non nuls et soit M la matrice définie par $M = \begin{pmatrix} 1 & a_1/a_2 & a_1/a_3 \\ a_2/a_1 & 1 & a_2/a_3 \\ a_3/a_1 & a_3/a_2 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer M^2.

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

....

2. En déduire que la matrice M n'est pas inversible.

....

....

....

....

....

....

....

....

Méthode 2 – Inversion d'une matrice par la méthode de Gauss

Pour déterminer l'inverse d'une matrice, on vous demande en générale de calculer le produit de deux matrices qui amènera à kI où k est un réel et I la matrice identité (exemple 23 Q.2.). Il est également possible qu'on vous demande de calculer l'inverse d'une matrice après la détermination d'un polynôme annulateur (exemple 24). La détermination de l'inverse d'une matrice peut être également à la suite d'une diagonalisation (que l'on verra plus tard).

Dans les autres, le cas où il n'y a aucune information pour déterminer facilement l'inverse, on pourra utiliser la **méthode de Gauss** selon la procédure suivante :

Exemple 26

Calculer la matrice inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \textbf{Pivot} \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \end{array}$$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Méthode 3 – Lien entre système d'équations et inverse d'une matrice

On suppose que l'écriture matricielle d'un système d'équations est $AX = B$ où X est la matrice colonne des inconnues et B une matrice colonne. Alors le système admet une unique solution si, et seulement si, la matrice A est une matrice carrée inversible. Dans ce cas, $X = A^{-1}B$.

Exemple 27

Oral HEC, sujet N° 20 2008, exercice principal Soient $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 3 & -7 & 9 \\ 2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2, puis déterminer a et b tels que $A^2 = aA + bI$.

   ....

   $A^2 =$ ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

2. En déduire que la matrice A est inversible et exprimer son inverse A^{-1} en fonction de A et I, puis calculer A^{-1}.

   ....

   ....

   ....

   Donc :

   ....

A^{-1} ....

....

....

3. Utiliser le calcul de A^{-1} pour résoudre le système :

$$\begin{cases} -2x & +2y & -3z & = & 2 \\ 3x & -7y & +9z & = & 0 \\ 2x & -4y & +5z & = & -2 \end{cases}$$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

4. Vérifier que la formule suivante est vraie pour $n = -1$:

$$A^n = (-1)^n \left[(1-2^n)A + (2-2^n)I\right]$$

....

....

....

On considère une matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ où a, b, c et d sont des réels.

Définition 8 – Déterminant d'une matrice d'ordre 2

Le **déterminant** de la matrice A noté $\mathbf{det}(A)$ est défini par le réel :

$$\mathbf{det}(A) \quad = \quad a \times d - c \times b$$

Propriété 7 – DÉTERMINANT DE kA POUR UN RÉEL k

Pour tout réel k et pour toutes matrices d'ordre 2 A et B on a :

➟ $\mathbf{det}(kA) = k^2\mathbf{det}(\mathbf{A})$

➟ $\mathbf{det}(\mathbf{AB}) = \mathbf{det}(A) \times \mathbf{det}(B)$

EXEMPLE 28

Calculer les déterminants des matrices suivantes :

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$. 2. $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$. 3. $C = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. 4. $D = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

$\mathbf{det}(A) =$ ....

$\mathbf{det}(B) =$ ....

$\mathbf{det}(C) =$ ....

$\mathbf{det}(D) =$ .... $\mathbf{det}(AB) =$ ....

$\mathbf{det}(ABC) =$ .... $\mathbf{det}(DC) =$ ....

Le déterminant d'une matrice carrée d'ordre 3 ou plus n'est pas au programme. Il est alors interdit de justifier l'inversibilité d'une matrice d'ordre 3 par le déterminant.

EXEMPLE 29

TIRÉ DE, ESCP 2009 On considère huit réels a, b, c, d, x, y, z et t. On pose $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$.

1. Calculer $M \times N$.

....

....

....

....

....

....

2. Montrer que $Det(M \times N) = Det(M) \times Det(N)$.

....

....

....

....

....

....

Propriété 8 – Cas particulier : inversion d'une matrice d'ordre 2

Soit A une matrice carré d'ordre 2. Alors, A est inversible si et seulement si, son déterminant est non-nul. Dans ce cas :

$$A^{-1} = \frac{1}{\mathbf{det}(A)} \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$$

Exemple 30

Justifier l'invesibilité puis donner les matrices inverses des matrices de l'exemple 28.

1. ....
   $A^{-1} =$ ....
   ....
2. ....
   $B^{-1} =$ ....
   ....
3. ....
   $C^{-1} =$ ....
   ....
4. ....
   $D^{-1} =$ ....
   ....

3- Réduction d'une matrice carrée

Définition 9 – Valeur propre et vecteur propre d'une matrice

Soit A une matrice carrée d'ordre n. Un vecteur V *(une matrice de format (n,1))* est un **vecteur propre** de A, si et seulement si, il existe un réel k tel que $AV = k \times V$. Le réel k est appelé **valeur propre** associée au vecteur propre V.

On peut dire également que le vecteur V est un vecteur propre associé à la valeur propre k.

Exemple 31

1. **Ecricome 2023** On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$ et les vecteurs $X_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $X_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   (a) Calculer AX_1 et AX_2.

   ....

   $AX_1 =$ ....

   ....

   ....

   $AX_2 =$ ....

   ....

   (b) En déduire que 12 et 5 sont des valeurs propres de A et donner des vecteurs associés.

   ....

   ....

   ....

2. **ESCP 2023** On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

   Montrer que les trois vecteurs $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $W = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ sont des vecteurs propres de A. Donner les valeurs propres associées.

   ....

   $AU =$ ....

   ....

   Donc ....

   ....

   ....

   $AV =$ ....

   ....

Donc ....

....

....

$AW =$ ....

....

Donc ....

....

Définition 10 – POLYNÔME ANNULATEUR

Soit A une matrice carrée d'ordre n. Un polynôme P de degré m, $m \in \mathbb{N}^*$ avec $P(X) = a_m X^m + a_{m-1} X^{m-1} + \cdots + a_0$ est un **polynôme annulateur** de A si, et seulement si, $P(A) = 0$.

EXEMPLE 32

1. On reprend les matrices A de l'exemple 31.
   (a) **ECRICOME 2023** Montrer que $P(X) = (X-12)(X-5)$ est un polynôme annulateur de A.

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   (b) **ESCP 2023** Exprimer A^2 en fonction de A et de I, puis déterminer un polynôme annulateur de A qui soit de degré 2.

   ....

   $A^2 =$ ....

   ....

   ....

   Donc :

   ....

   ....

   Par conséquent, le polynôme P avec $P(X) =$ ....

2. **Ecricome 2016** On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

   Calculer $(A-I)(A-2I)(A-3I)$ où I est la matrice identité.
   En déduire un polynôme annulateur de A.

....

$(A-I)(A-2I) =$ ....

....

....

$(A-I)(A-2I)(A-3I) =$ ....

....

....

Donc, le polynôme P, $P(X) =$ ....

Propriété 9 – Polynôme annulateur et valeur propre

Soient A une matrice carrée d'ordre n et P un polynôme annulateur de A. Alors, les valeurs propres de A sont des racines de P.

D'une autre manière, les valeurs propres possibles de A sont les racines de P.

Exemple 33

1. **Ecricome 2016** Déterminer les valeurs propres possibles de la matrice A de l'exemple 32.

   ....

   ....

   ....

2. **Bsb 2022** On considère les matrices $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   (a) Calculer M^2. Vérifier que $2M^2 = M + I_2$.

   ....

   $M^2 =$ ....

   ....

   ....

   $M + I_2 =$ ....

   ....

   Donc ....

   (b) En déduire un polynôme annulateur de M.

   On pose $P(X) =$ ....

   On a :......, donc ....

   (c) Déterminer les valeurs propres possibles de M.

   ....

   ....

   ....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

(d) On pose $U = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Calculer MU et MV. Quelles sont les valeurs propres de M ?

....

$MU =$ ....

....

Donc, ... est la valeur propre associée à U ....

$MV =$ ....

....

Donc, ...

Par conséquent, les valeurs propres de M sont ....

Méthode 4 – Calculer un vecteur propre à partir d'une valeur propre

On considère une matrice carrée A d'ordre n. On veut déterminer un vecteur propre V sachant qu'un réel k est une valeur propre associée.

1. On pose $V = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ si A est d'ordre 2 et $V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ si A est d'ordre 3.
2. On cherche x, y et éventuellement z (des inconnues) à partir de l'équation $AV = kV$. On ne trouvera pas des valeurs mais des relations entre ces trois inconnues.

Exemple 34

On donne $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $A^2 = A + 2I_3$

....

....

....

....

....

2. Donner un polynôme annulateur de A.

3. Calculer les valeurs propres possibles de A.

....

....

4. Déterminer le vecteur $V\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tel que $AV = -V$. Le vecteur V est alors un vecteur propre associé à la valeur propre -1. ....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

5. Déterminer un vecteur propre associé à la valeur propre 2. ....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Définition 11 – Matrice diagonale

Soit A une matrice carrée d'ordre n. La matrice A est **diagonale** si, et seulement si, les coefficients en dehors de la diagonale sont tous nuls.
Si $A = (a)_{ij}$ alors $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ tel que $i \neq j$ on a $a_{ij} = 0$.

Exemple 35

Identifier les matrices qui sont diagonales :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

A est .... car ....

B est .... car ....

C est .... car ....

D est .... car ....

Définition 12 – Matrice diagonalisable

Soit A une matrice carrée d'ordre p. La matrice A est **diagonalisable** si, et seulement si, il existe une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que $AP = PD$ (ou $A = PDP^{-1}$ ou $D = P^{-1}AP$).

Exemple 36

Escp 2016 (modifié)

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 3 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $A^3 - A^2 - 2A = O_3$.

....

$A^2 =$ ....

....

....

$A^3 =$ ....

....

Donc : ....

$A^3 - A^2 - 2A =$ ....

....

....

2. Donner un polynôme non nul R annulateur de A.

....

....

....

3. Calculer les valeurs propres possibles de A.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

4. On donne $U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $U_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $U_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Montrer que U_k pour $k \in [\![1;3]\!]$ est une vecteur propre de A. Calculer les valeurs propres associées.

....

$AU_1 =$ ....

....

....

Donc : ....

....

$AU_2 =$ ....

....

. . . .

Donc : . . . .

. . . .

$AU_2 =$ . . . .

. . . .

Donc : . . . .

. . . .

5. Calculer PQ. En déduire que P est inversible et déterminer P^{-1}.

. . . .

$PQ =$ . . . .

. . . .

. . . .

Donc . . . .

. . . .

. . . .

6. Montrer que A est diagonalisable. On notera D la matrice diagonale trouvée.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

7. Soit M la matrice carrée définie par $M = I - 2A + 5A^2$.

   (a) Montrer que $A^2P = PD^2$. En déduire l'égalité $MP = P(I - 2D + 5D^2)$.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

(b) Montrer que M est diagonalisable et donner ses valeurs propres.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

Propriété 10 – Valeurs propres et matrice diagonalisable

1. Si A est une matrice carrée d'ordre 2 admettant deux valeurs propres différentes, alors A est diagonalisable.
2. Si A est une matrice carrée d'ordre 3 admettant trois valeurs propres différentes, alors A est diagonalisable.

Dans ce cas, la matrice diagonale *semblable* à la matrice A est la matrice formée par les valeurs propres sur la diagonale (et 0 partout ailleurs) et la matrice inversible P est consituée par les vecteurs propres associées à ces valeurs propres dans le même ordre de disposition.

Exemple 37

Ecricome 2021 (modifié) On considères les matrices $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$, $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que V_1 et V_2 sont des vecteurs propres de A.

. . . .

. . . .

. . . .

....

....

....

2. Montrer que la matrice A est diagonalisable.

....

....

....

....

On termine ce paragraphe sur le lien entre l'inversion et la diagonalisation. Dans ce cas, on a besoin de la propriété suivante :

Propriété 11 – Inversion d'une matrice diagonale

Soit D une matrice diagonale. Alors, D est inversible si, et seulement si, les coefficients sur la diagonale de D sont tous non nuls. Dans ce cas les coefficients sur la diagonale de la matrice D^{-1} sont les inverses des coefficients sur la diagonale de D.

Si $D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & d_p \end{pmatrix}$ alors $D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{d_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{d_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \frac{1}{d_p} \end{pmatrix}$.

Cette formule permet de calculer plus simplement l'inverse d'une matrice diagonalisable. En effet, si $AP = PD$ alors :

$$A^{-1} = P^{-1}D^{-1}P$$

Exemple 38

Oral HEC 2011 E222 (simplifié), Exercice sans préparation Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $A^2 - I$.

....

$A^2 =$ ....

....

Donc : ....

2. Déterminer deux vecteurs propres, non-nuls et non colinéaires, associés à la valeur propre -1.

....

....

....

....

....

....

....

3. Déterminer un vecteur propre associé à la valeur propre 1.

4. Montrer que la matrice A est diagonalisable.

5. Calculer A^{-1}.

Propriété 12 – Inversion d'une matrice triangulaire

Une matrice A **est triangulaire** inférieur (resp supérieur) si les coefficients au-dessus (resp. en dessous) de la diagonale sont tous nuls.
Une matrice triangulaire est inversible si, et seulement si, les coefficients sur la diagonale sont tous non nuls.

Exemple 39

Oral HEC 2022, Exercice principal (légèrement modifié)
Soit a un réel non nul. On pose

$$M = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ \frac{1}{a} & 1 & a \\ \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} & 1 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & a & a^2 \\ \frac{1}{a} & 3 & a \\ \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} & 3 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer les réels k tels que $M - kI$ soit triangulaire. Les matrices ainsi obtenues sont elles inversibles ?

....

....

....

....

....

....

2. Montrer que $\begin{pmatrix} a^2 \\ a \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de M.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

3. Exprimer M^2 en focntion de M.

....

....

....

....

....

....

. . . .

. . . .

. . . .

4. Que peut on en déduire sur les valeurs propres de M ?

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

5. Montrer que M n'est pas inversible.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

4- Puissance d'une matrice carrée

Comme pour les nombres, la puissance d'une matrice A par un entier naturel n est la multiplication de A par elle-même n fois successive :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n \;=\; \underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{n\text{–fois}}$$

Concrètement, pour calculer, par exemple A^3, on peut calculer $A^2 \times A$ ou $A \times A^2$.
C'est-à-dire qu'il faut calculer A^2 puis on peut calculer A^3 de deux manières : $A^2 \times A$ ou $A \times A^2$.

D'une manière générale, pour calculer A^n, on peut calculer étape par étape A^2, A^3, A^4 avec la **formule de récurrence** suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad A^n \;=\; A^{n-1} \times A \;=\; A \times A^{n-1}$$

Par convention : pour une matrice carrée non nulle A on a $A^0 = I$.

Remarque importante sur les calculs avec récurrence

La notion de récurrence suppose l'existence d'une relation entre une ou plusieurs étapes avec l'étape suivante. Ainsi, l'étape actuelle ou la valeur sur le moment est indexée par n et l'étape suivante par $(n+1)$. Il va de soi que l'étape précédente est marquée par $(n-1)$. Si par exemple on a une **suite de nombres réels** $(u_n)_{n\geq 0}$ telle que

$$u_0 = 1 \text{ et } u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + n - 1$$

Alors :

Calculer u_1 à partir de u_0

Il faut remplacer n par 0 dans la relation de récurrence $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + n - 1$.

Donc, $u_1 = \frac{2}{3}u_0 + 0 - 1 = \frac{2}{3} \times 1 + 0 - 1 = -\frac{1}{3}$.

Calculer u_2 à partir de u_1

Il faut remplacer n par 1 dans la relation de récurrence $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + n - 1$.

Donc, $u_2 = \frac{2}{3}u_1 + 1 - 1 = \frac{2}{3} \times \left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{2}{9}$.

Calculer u_3 à partir de u_2

....

....

....

Calculer u_4 à partir de u_3

....

....

....

Exemple 40

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2, A^3 et A^4.

   ....

   ....

   $A^2 =$ ....

   ....

   $A^3 =$ ....

   ....

   ....

   $A^4 =$ ....

   ....

2. Conjecturer sur A^n, $n \in \mathbb{N}^*$.

   ....

   $\forall n \in \mathbb{N}^*, A^n =$ ....

   ....

   A votre avis, comment peut-on démontrer cette formule ?

   ....

Pour une démonstration rigoureuse de cette formule de A^n, il faut recourir à une forme de particulière de raisonnement appelé **raisonnement par récurrence**. Comme son nom l'indique, le raisonnement par récurrence repose sur le lien entre l'étape n et l'étape suivante.

On verra dans un autre contexte que ce lien peut être entre les étapes $k, k \leq n$ et l'étape $(n+1)$. Ainsi, le raisonnement par récurrence généralisée permet de passer à l'étape $(n+1)$ en supposant que toutes les étapes précédentes sont valides. Donc l'étape $(n+1)$ dépend de plusieurs étapes précédentes et non seulement de l'étape n.

Méthode 5 – Raisonnement par récurrence

Ce raisonnement ne s'applique que sur les énoncés de la forme $\mathscr{P}_n$ avec $n \in \mathbb{N}$. Il comporte trois étapes :

1. **Initialisation**
   Il s'agit de vérifier que l'énoncé est vrai pour son premier terme.
2. **Initialisation**
   On suppose que l'étape n pour n quelconque de $\mathbb{N}$ est vérifiée (*re-écrire la proposition en entier)*.
   Il faut démontrer ensuite que l'étape $(n+1)$ où tous les n sont remplacés par $(n+1)$ est vérifiée.
3. **Conclusion**
   Reprendre le schéma du raisonnement et conclure.

On reprend l'exemple 40. On pose $\mathscr{P}_n : \forall n \in \mathbb{N}^*$ on a $A^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1} \\ 2^{n-1} & 2^{n-1} \end{pmatrix}$.

Initialisation $n = 1$.

D'un côté, $A^1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$;

De l'autre avec $n = 1$, $\begin{pmatrix} 2^{1-1} & 2^{1-1} \\ 2^{1-1} & 2^{1-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^0 & 2^0 \\ 2^0 & 2^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Donc, la proposition est vraie pour $n = 1$.

Hérédité

On suppose que pour un certain entier naturel n on a $A^n \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1} \\ 2^{n-1} & 2^{n-1} \end{pmatrix}$.

On veut montrer que $A^{n+1} \begin{pmatrix} 2^{n+1-1} & 2^{n+1-1} \\ 2^{n+1-1} & 2^{n+1-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n & 2^n \\ 2^n & 2^n \end{pmatrix}$.

On a

$$\begin{aligned} A^{n+1} = A^n \times A &= \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1} \\ 2^{n-1} & 2^{n-1} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n-1} + 2^{n-1} & 2^{n-1} + 2^{n-1} \\ 2^{n-1} + 2^{n-1} & 2^{n-1} + 2^{n-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \times 2^{n-1} & 2 \times 2^{n-1} \\ 2 \times 2^{n-1} & 2 \times 2^{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n & 2^n \\ 2^n & 2^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Conclusion

$\mathscr{P}_1$ est vrai et $\mathscr{P}_n \Rightarrow \mathscr{P}_{n+1}$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $A^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1} \\ 2^{n-1} & 2^{n-1} \end{pmatrix}$.

Exemple 41

Calculer A^n, en le montrant par récurrence pour $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

....

$A^2 =$ ....

....

....

$A^3 =$ ....

....

....

$A^4 =$ ....

....

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $A^n = \begin{pmatrix} \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \end{pmatrix}$.

Initialisation

....

....

....

. . . .

. . . .

. . . .

Hérédité

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

Conclusion

. . . .

Exemple 42

Soient $A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ et D une matrice diagonale de $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ telles qu'il existe une matrice inversible P vérifiant $A = PDP^{-1}$. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

....

....

....

Exemple 43

Tiré de BSB (2022)

On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.
Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n on a :

$$M^n = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2-2\left(-\frac{1}{2}\right)^n & 3\left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix}$$

....

....

Initialisation

....

....

....

....

....

....

Hérédité

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

. . . .

. . . .

Conclusion

. . . .

Exemple 44

Hec 2022 On reprend l'exercice 39

1. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $M^k = 3^{k-1}M$.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

2. Exprimer B^p en fonction de p, I et M pour $p \in \mathbb{N}$.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

3. Trouver deux vecteurs non proportionnels de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ dont les coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ sont solutions de l'équation $x + ay + a^2z = 0$. Que peut-on dire de ces vecteurs ?

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

Propriété 13 – Puissance entière d'une matrice diagonale

Si D est une matrice diagonale alors la matrice D^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ est la matrice ayant sur la diagonale les puissances des coefficients de D. Mathématiquement, si $D = (d_{i,j})$ est une matrice diagonale d'ordre p, c'est-à-dire $D \in \mathscr{M}_p(\mathbb{R})$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$D^n = \begin{pmatrix} d_{1,1}^n & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & d_{2,2}^n & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & & 0 & d_{p,p}^n \end{pmatrix}$$

Exemple 45

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les réels a et b pour que $P^2 = aP + bI_2$.

....
....
....
....
....
....

2. En déduire la matrice inverse de P notée P^{-1}.

....
....
....

3. Montrer que $A = PDP^{-1}$.

....
....
....
....
....

4. Déterminer et démontrer par récurrence l'expression de P^n en fonction de P et I pour tout entier naturel $n \geq 2$.

....
....
....
....

5. Cette formule est-elle vraie pour $n = 0$? Pour $n = 1$?

6. En déduire P^n, puis A^n sous forme de tableau de nombres pour tout entier naturel n.

....

Définition 13 – Deux matrices qui commutent

Soient $(A,B) \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})^2$. Les matrices A et B **commutent** si, et seulement si, $A \times B = B \times A$.

Si A ou B ne sont pas des matrices carrées, les formats de $A \times B$ et $B \times A$ ne sont pas forcément identiques.

Remarque

- La matrice identité commute avec toutes les autres matrices.
- **En général, $A \times B \neq B \times A$. Il faut respecter l'ordre des calculs pour les matrices.**

Exemple 46

Soient $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -2a+b & a \\ -7a & b \end{pmatrix}$.

1. Montrer que A et B commutent.

....

....

....

....

....

....

....

2. La matrice $C = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ commute-t-elle avec A ? Justifier.

....

....

....

....

....

....

....

Dans la suite, on aura besoin de la notation $\sum$ dite **somme**.

La fin de l' indice

$$\sum_{\mathbf{k=p}}^{\mathbf{n}} \textbf{La quantité à additionner}$$

change avec l'indice

Indice : indique ce qui change

Le début de l'indice

Exemple 47

Développer et calculer les sommes suivantes :

1. $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{10} k = 0 + 1 + 2 +$ ....
   ....
   ....
2. $T = \displaystyle\sum_{j=0}^{5} j(j-1) =$ ....
   ....
   ....
3. Calculer pour $n = 0$, $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$ et $n = 5$ la somme $S_n = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} j$ ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
4. Démontrer par récurrence la formule idetifiée pour S.
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....

Propriété 14 – Binôme de Newton

Soient $(A, B) \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})^2$ deux matrices carrées d'ordre $p, p \in \mathbb{N}^*$ qui commutent. Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ (A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k}$$

Exemple 48

On considère les matrices suivantes :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ L = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } J = L - I$$

1. Calculer J^2 puis J^3.

   ....

   $J^2 =$ ....

   ....

   ....

   $J^3 =$ ....

   ....

2. En utilisant la formule du binôme de Newton, montrer que pour tout entier $n \geq 2$ on a :

   $$L^n = I + nJ + \frac{n(n-1)}{2} J^2$$

   Les matrices I et J ....

   Donc, par la formule du binôme de Newton on a pour tout entier naturel n :

   $(J+I)^n = \sum_{k=0}^{n}$ ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

3. En déduire, pour $n \geq 2$, les neufs coefficients de L^n.
   Vérifier que votre résultat reste vrai lorsque $n = 0$ et lorsque $n = 1$.

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

Exemple 49

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer de deux manières que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, $N^n = O_{\mathscr{M}_3(R)}$.

2. En écrivant $A = I + N$, calculer A^n en fonction de n où $n \in \mathbb{N}$.

Exemple 50

Soient $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $J^{2n} = I$ et $J^{2n+1} = J$. On admet que pour un réel q et pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

2. On admet que $A = 3I + J$. Calculer la matrice A^n pour un entier naturel n.

ENTRAÎNEMENTS

EXERCICE 14

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $(A-I)(A-2I)(A-3I)$ où I est la matrice identité.
2. Déterminer un polynôme annulateur de A. En déduire les valeurs propres possibles de A.
3. Vérifier que les vecteurs colonnes de la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ sont des vecteurs propres de A.
   Préciser pour chacun la valeur propre correspondante.
4. Par la méthode de Gauss, démontrer que P est inversible et calculer P^{-1}.
5. Vérifier que la matrice diagonale $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ satisfait la relation $AP = PD$ et en déduire l'expression de A en fonction de P, D et P^{-1}.
6. Exprimer A^n en fonction de P, P^{-1} et D^n pour tout $n \in \mathbb{N}$. Une justification est attendue.
7. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

EXERCICE 15

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $M = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

1. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a : $A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 3^n - 2^n \\ 0 & 3^n & n\,3^{n-1} \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$,
2. Calculer PQ. En déduire que P est inversible et donner P^{-1}.
3. Vérifier que $PMP^{-1} = A$.
4. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a : $M^n = P^{-1}A^nP$.
5. En déduire que pour tout entier naturel n, on a : $M^n = \begin{pmatrix} 2\times 3^n - 2^n & 0 & 2(2^n - 3^n) \\ -n\,3^{n-1} & 3^n & n\,3^{n-1} \\ 3^n - 2^n & 0 & 2^{n+1} - 3^n \end{pmatrix}$

EXERCICE 16: TIRÉ DE, ESCP 2022

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

1. Calculer A^2 puis déterminer le réel α tel que $A^3 = \alpha A$.
2. Montrer que si A est inversible alors $A^2 = 0_3$. A-t-on $A^2 = 0_3$? Conclure.

Dans la suite, on se propose de déterminer, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, la matrice A^n de deux façons différentes.

3. **Première méthode**
   (a) Montrer que $A^5 = \alpha^2 A$.
   (b) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel p non nul, on a : $A^{2p-1} = \alpha^{p-1}A$.
   (c) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel p non nul, on a : $A^{2p} = \alpha^{p-1}A^2$.
4. **Deuxième méthode**

(a) Déduire de la question 3. a) les valeurs propres possibles de la matrice A.

(b) Montrer que les vecteurs $U = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $W = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont des vecteurs propres de A et préciser les valeurs propres associées.

(c) On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. Calculer les deux produits AP et PD.

(d) Soit $Q = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & -4 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.Calculer PQ puis en déduire que P est inversible et donner P^{-1}.

(e) Justifier que la matrice A est diangonalisable, puis montrer que pa récurrence que, pour tout entier naturel n non nul, on a $A^n = PD^nP^{-1}$.
Écrire explicitement les neufs éléments de la matrice A^n (toujours avec $n \geq 1$).

Exercice 17

Soient les matrices carrées : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & -5 & 6 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$, $H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1.

(a) Montrer que $A^2 = 3I - 2A$. En déduire que A est inversible et détailler la matrice A^{-1}.

(b) Montrer qu'il existe un réel a tel que $AH = aH$.

(c) Montrer qu'il existe un réel b tel que $A = I + bH$.

On considère la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} b_0 = 0 \\ \text{Pour tout entier naturel } n, \quad b_{n+1} = -3b_n + 2. \end{cases}$$

2.

(a) Sans calculer b_n, montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $A^n = I + b_n H$.

(b) En déduire $A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3b_n + 3 \\ b_n + 3 \end{pmatrix}$

(c) Calculer b_n en fonction de n, puis exprimer la matrice colonne $\begin{pmatrix} 1 \\ 3b_n + 3 \\ b_n + 3 \end{pmatrix}$ en fonction de n.

On considère maintenant les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$\begin{cases} u_0 = v_0 = 3 \\ \text{Pour tout entier naturel } n, \quad u_{n+1} = 6 - 5u_n + 6v_n \quad \text{et} \quad v_{n+1} = 2 - 2u_n + 3v_n. \end{cases}$$

On note, pour tout entier naturel n, $X_n = \begin{pmatrix} 1 \\ u_n \\ v_n \end{pmatrix}$.

3.

(a) Montrer que pour tout entier naturel n, $X_{n+1} = AX_n$.

(b) En déduire que pour tout entier naturel n, $X_n = A^n X_0$.

(c) Calculer finalement u_n et v_n en fonction de n.

Exercice 18: Extrait, Ecricome 2023

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ et $Q = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$.

On note $X_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $X_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1. (a) Calculer AX_1 et AX_2.
   (b) En déduire que 12 et 5 sont des valeurs propres de A et donner des vecteurs associés.
2. Montrer que P est inversible et donner son inverse. (On vérifiera que $P^{-1} = Q$).
3. Vérifier que $A = PDP^{-1}$.
4. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N},\ A^n = PD^nP^{-1}$.
5. Soit $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
   (a) Calculer $P^{-1}X$.
   (b) En déduire l'expression de A^nX pour tout entier naturel n.

Exercice 19: Extrait, Bsb 2022

On considère les matrices $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. (a) Calculer M^2. Vérifier que $2M^2 = M + I_2$.
   (b) En déduire un polynôme annulateur de M.
   (c) Soit $P(X) = 2X^2 - X - 1$. Calculer les racines de P. En déduire les valeurs propres possibles de M.
   (d) On pose $U = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Calculer MU et MV. Quelles sont les valeurs propres de M ?
2. On donne les matrices $P = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $Q = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.
   (a) Calculer PQ. En déduire que P est inversible et déterminer P^{-1}.
   (b) Montrer que $MP = PD$.
   (c) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n on a : $M^nP = PD^n$.
   (d) Donner les quatre coefficients de D^n pour tout entier naturel n.
   (e) Déduire des questions précédentes que pour tout entier naturel n on a :

$$M^n = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 - 2\left(-\frac{1}{2}\right)^n & 3\left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix}$$

Exercice 20: Tiré de, Ecricome 2016

On se propose de déterminer par deux méthodes, les suites de réels $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definies par $u_0 = 1$et $v_0 = 1$ et vérifiant les relations de récurrence, pour tout entier naturel n :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{2}v_n \\ v_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + \frac{1}{2}v_n \end{cases}$$

1. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n on a : $u_n + v_n = 2$.
2. On définit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_n = v_n - \frac{4}{5}$$

   (a) Utiliser la question qui précède pour montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique.
   (b) Exprimer x_n en fonction de n. En déduire v_n puis u_n en fonction de n.

3. On considère les matrices à coefficients réels B et C définies par :

$$B = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } C = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

   (a) Calculer le produit BC. Justifer que les matrices B et C ne sont sont inversibles.

   (b) On pose $A = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

4. Pour tout entier naturel n, calculer le produit de la matrice A avec le vecteur $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$ soit : $A\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$.

   Justifier ensuite que $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$.

5. Vérifier que l'on a :

$$\begin{cases} B + C = I \\ B + \frac{1}{6}C = A \end{cases}$$

   où I désigne la matrice unité d'ordre 2.

6. Calculer les produits matriciels B^2, C^2, BC, CB.

7. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n :

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \left(B + \left(\frac{1}{6}\right)^n C\right)\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$$

8. Retrouver ainsi l'expression de u_n et de v_n en fonction de n.

Exercice 21: Extrait, Escp 2023

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Exprimer A^2 en fonction de A et de I, puis déterminer le polynôme annulateur de A qui soit de degré 2.
2. (a) Quelles sont les valeurs propres possibles de A ?
   (b) Utiliser le polynôme annulateur trouvé pour montrer que la matrice A est inversible et déterminer A^{-1} en fonction de A et de I.
3. On considère les trois vecteurs $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $W = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

   (a) Calculer les produits AU, AV et AW et en déduire que les valeurs propres possibles de A trouvées à la question 2a) sont effectivement valeurs propres de A.

   (b) On pose $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Montrer que $AQ = QD$.

   (c) On donne $R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

   Calculer QR puis en déduire que Q est inversible et exprimer Q^{-1} en fonction de R.

   (d) En déduire que A est diagonalisable.
4. (a) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a $A^n = QD^nQ^{-1}$.
   (b) Vérifier que la première ligne de la matrice A est $\frac{1}{3}(2^n + 2(-1)^n \quad (2^n - (-1)^n) \quad 2^n - (-1)^n)$.

Exercice 22: Ecricome 2016

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.
On définit également trois suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par leurs premiers termes $u_0 = v_0 = w_0 = 0$ et les raltion de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = 4u_n - 3v_n - 2w_n + 1 \\ v_{n+1} = 2u_n - v_n - 2w_n + 2 \\ w_{n+1} = -u_n + v_n + 3w_n - 3 \end{cases}$$

1. Calculer u_1, v_1 et w_1.
2. *Puissances successives de la matrice A.*
   (a) Calculer $(A-I)(A-2I)(A-3I)$ où I est la matrice identité.
   On pose $P(X) = (X-1)(X-2)(X-3)$.
   Calculer les racines de P. En déduire les valeurs propres possibles de A.
   (b) Vérifier que la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ est obtenue en juxtaposant trois vecteurs-colonnes qui sont vecteurs propres de A. Préciser pour chacun la valeur propre correspondante.
   (c) Par la méthode de Gauss, montrer que P est inversible et $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.
   (d) Vérifier que la matrice diagonale $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ satisfait la relation $AP = PD$ et en déduire l'expression de A en fonction de P, D et P^{-1}.
   (e) Exprimer A^n en fonction de P, P^{-1} et D^n pour tout $n \in \mathbb{N}$. Une justification est attendue.
   (f) Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. *Obtention de l'expression des termes des trois suites récurrentes.*
   (a) Vérifier que l'on a la relation : $C = AC + B$.
   (b) On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$. Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n + B$.
   (c) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = C - A^n C$.
   (d) En déduire les expressions de u_n, v_n et w_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$

Exercice 23: Escp 2021

On considère les matrices suivantes de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1.
   (a) Calculer J^2 puis vérifier que $J^3 = 2J$.
   (b) Calculer les réels λ tel que $Jv = \lambda v$ où v est une colonne de la matrice P.
   (c) On pose $D_1 = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$. Montrer que $JP = PD_1$.
   En déduire pour tout entier naturel n, J^n en fonction de n.

Dans la suite de l'exercice, on considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

2.

(a) Vérifier que $K = J^2 - I$.

(b) Montrer qu'il existe trois réels a, b et c tels que $A = aI + bJ + cK$.

(c) En déduire que $A = J^2 + 2J$ puis établir l'existence d'une matrice diagonale D_2 que l'on explicitera, telle que $AP = PD_2$.

3.

(a) Compléter le `script` scilab suivant pour qu'il affiche et calcule A^n pour une valeur de l'entier naturel n entrée par l'utilisateur.

```
n=input('Entrer une valeur pour n:')
A=[...,...,...]
B=....
disp(B)

```

4. Pour $n = 2$, le script précédent renvoie : $A^2 = \begin{pmatrix} 6 & 8 & 6 \\ 8 & 12 & 8 \\ 6 & 8 & 6 \end{pmatrix}$.

   Pour $n = 3$, le script précédent renvoie : $A^3 = \begin{pmatrix} 28 & 40 & 28 \\ 40 & 56 & 40 \\ 28 & 40 & 28 \end{pmatrix}$.

5. Pour $n = 5$, donner, sans calculer A^5, un argument permettant de préciser laquelle des deux matrices B_1 et B_2 suivantes est renvoyée par ce script :

$$B_1 = \begin{pmatrix} 656 & 928 & 656 \\ 928 & 1312 & 928 \\ 656 & 928 & 656 \end{pmatrix} \qquad B_2 = \begin{pmatrix} 656 & 928 & 656 \\ 928 & 1324 & 928 \\ 656 & 928 & 656 \end{pmatrix}$$

Exercice 24: Bsb 2021

Soit M et I les matrices d'ordre 3 définies par :

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1.

(a) Calculer M^2 et M^3 en déduire à l'aide d'un raisonnement par l'absurde que M n'est pas inversible.

(b) Pour tout entier $n \neq 3$, déterminer M^n.

(c) Calculer $(I - M)(I + M + M^2)$. En déduire que $(I - M)$ est inversible et donner son inverse $(I - M)^{-1}$.

(d) Déterminer un polynôme P tel que $P(M) = 0$.

2. On pose : $S = M + I$.

   (a) À l'aide de la formule du binôme, exprimer pour tout $n \in \mathbb{N}$, la matrice S^n en fonction de I, M et M^2.

   (b) Déterminer la deuxième colonne de la matrice S^n.

3. Soit $(u_n)_{n\geq 0}$, $(v_n)_{n\geq 0}$ et $w_n)_{n\geq 0}$ les trois suites définies par :

$$u_0 = 0, v_0 = 1, w_0 = 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = & 3u_n + v_n \\ v_{n+1} = & -3u_n + w_n \\ w_{n+1} = & u_n \end{cases}$$

   (a) Établir pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'égalité : $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$.

   (b) En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}$, la relation $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = S^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}$.

(c) Exprimer u_n, v_n et w_n en fonction de n. Montrer que $u_n + v_n + w_n = 1$.

4. Dans cette question, on se propose de déterminer une matrice J d'ordre 3, triangulaire supérieur, à coefficients diagonaux tous nuls et une matrice P d'ordre 3, inversible, qui vérifient la relation : $J = PMP$.

   (a) On pose : $U = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Calculer les matrices colonnes V et W définies par : $V = -MU$ et $W = M^2U$.

   (b) Soit P la matrice d'ordre 3 dont la première colonne est W, la deuxième est V et la troisième est U.
   Calculer P^2 ; en déduire que P est inversible et donner son inverse P^{-1}.

   (c) Expliciter la matrice $J = PMP$. En déduire M^n en fonction de n, $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 25: Bsb 2019

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n on a :

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 3^n - 2^n \\ 0 & 3^n & n3^{n-1} \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$$

2. **Applications à l'étude de deux suites**

   (a) On considère les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $a_0 = 2$, $b_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$a_{n+1} = 2a_n + 3^n \text{ et } b_{n+1} = 3b_n + 3^n$$

   Quelle instruction faut-il ajouter en ligne 4 dans le programme suivant pour qu'il affiche la valeur de (a_n), l'entier n étant donné par l'utilisateur (on justifiera la réponse) ?

   Rép1 : : $a = 2\star a + 3\hat{}n$ **Rép2 :** $a = 2\star a + 3\hat{}(i-1)$ **Rép3 :** Autre à préciser

```
1 n=inpunt("n?")
2 a=2
3 for i=1:n
4       ......
5 end
6 disp(a)
```

   Pour tout entier naturel n on pose $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ 3^n \end{pmatrix}$

   (b) Montrer que pour tout entier naturel n on a : $X_{n+1} = AX_n$.

   (c) Recopier et compléter le programme suivant afin qu'il affiche la valeur de a_n, l'entier n étant donné par l'utilisateur.

```
n=input("n?")
A=[.....]
X=[.....]
for i=1:n
        X=.....
end
disp(X(1))
```

   (d) Établir, pour tout $n \in \mathbb{N}$, que : $X_n = A^n X_0$.

   (e) En déduire en utilisant 1, que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $a_n = 2^n + 3^n$ et $b_n n3^{n-1}$.

3. **Applications au calcul de puissance d'une matrice**
   On considère les matrices :

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } Q = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Calculer PQ. En déduire que P est inversible et donner P^{-1}.

(b) Vérifier que $PMP^{-1} = A$.

(c) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n on a :$M^n = P{-}1A^nP$.
En déduire que pour tout entier naturel n on a :

$$M = \begin{pmatrix} 2\times 3^n - 2^n & 0 & 2(2^n - 3^n) \\ -n3^{n-1} & 3^n & n3^{n-1} \\ 3^n - 2^n & 0 & 2^{n+1} - 3^n \end{pmatrix}$$

4. **Application au calcul d'une somme**

(a) Montrer que pour tout entier naturel k on a : $2b_k = b_{k+1} - b_k - 3^k$.

(b) Pour tout entier naturel n calculer $\sum_{k=0}^{n} 3^n$.

(c) Montrer que pour tout entier naturel n on a : $\sum_{k=0}^{n}(b_{k+1} - b_k) = b_{n+1}$.

(d) Déduire des questions précédentes et de 2 e) que pour tout entier naturel n on a :

$$\sum_{k=0}^{n} k3^{k-1} = \frac{(n+1)3^n}{2} + \frac{1}{4} - \frac{3^n}{4}$$

EXERCICE 26: TIRÉ DE, ORAL HEC 2018

1. Donner une définition d'un vecteur et d'une valeur propre d'une matrice.
Soient a et b deux réels tels que $0 < a < 1$ et $0 < b < 1$. On pose $s = 1 - (a + b)$.
Soit A la matrice carrée d'ordre 2 définie par $A = \begin{pmatrix} 1-a & b \\ a & 1-b \end{pmatrix}$.

2. (a) Établir l'encadrement : $-1 < s < 1$.

(b) Montrer que le polynôme $R(X) = X^2 - (1+s)X + s$ est un polynôme annulateur de A.

(c) Calculer les racines de R que l'on notera λ_1 et λ_2 avec $\lambda_1 \leq \lambda_2$.
Quelles sont les valeurs propres possibles de A ?

(d) Calculer les vecteurs (vecteurs propres) U_1 et U_2 tels que $AU_1 = \lambda_1 U_1$ et $AU_2 = \lambda_1 U_2$.
On posera $U_k = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ puis on calcule x et y.

(e) On pose $Q = \frac{1}{a+b}\begin{pmatrix} a & -b \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & b \\ -1 & a \end{pmatrix}$.
Calculer $P \times Q$. Montrer que la matrice P est inversible. Calculer son inverse.

(f) Déterminer une matrice diagonale D telle que $AP = PD$.

3. On rappelle que par convention, on pose $A^0 = I$ où I est la matrice identité d'ordre 2.

(a) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $A^nP = PD^n$

(b) Exprimer pour tout entier naturel n, la matrice A^n sous la forme de tableau.

(c) Calculer en fonction de a et b la matrice $L = \lim_{n\to+\infty} A^n$, c'est-à-dire la matrice carrée dont les coefficients sont les limites des coefficients de A^n lorsque $n \to +\infty$.